



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y
AGRIMENSURA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - ECEN

TESIS DE GRADO

**Estudio de la estabilidad de los
isótopos del Calcio mediante la
solución exacta de superconductividad**

Autor:

Alan Cruz DASSIE

dassiealan@gmail.com

Director:

Dr. Rodolfo ID BETAN

idbetan@fceia.unr.edu.ar

Noviembre de 2019

*“Necesitamos educación científica para formar científicos,
pero la necesitamos también para generar conocimiento crítico en la gente.”*

Hans Bethe

*“Si no podemos pensar por nosotros mismos, si somos incapaces de cuestionar la autoridad,
somos pura masilla en manos de los que ejercen el poder.”*

El mundo y sus demonios, Carl Sagan

Resumen

Este trabajo es un estudio de sistemas de muchos cuerpos, particularmente analizamos los isótopos del Calcio ricos en neutrones. Esta elección se vio motivada por las recientes investigaciones que se realizaron en el *National Superconducting Cyclotron Laboratory*, MI, Estados Unidos durante el año 2018 en las cuales se descubrió el núcleo ligado ${}^{60}_{20}\text{Ca}_{40}$. Este resultado abrió la posibilidad de testear los métodos teóricos para la descripción de núcleos en la línea de goteo. Sumado a esto, la región de isótopos pesados del Calcio es el límite de las facilidades experimentales de hoy en día, es decir, ${}^{60}_{20}\text{Ca}_{40}$ se encuentra en la frontera experimental. Estudios sobre la estructura nuclear son entonces necesarios para guiar los futuros experimentos.

Luego de una introducción a los modelos de estructura nuclear, la línea de goteo y los estados del continuo, se presenta el modelo de Richardson junto con una modificación que permite incluir los estados del espectro continuo de energía positiva. Este modelo resuelve de manera exacta el Hamiltoniano de apareamiento y conserva el número de partículas, aspecto importante pues en los núcleos estudiados la cantidad de neutrones es de 50 como máximo. La elección de la fuerza de apareamiento para modelizar la interacción surge del hecho que ella incorpora las correlaciones partícula-partícula más importantes. Además, nos permite estudiar gran cantidad de isótopos del Calcio partiendo de un núcleo cerrado como el ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ o el ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$.

Se encontró que el último isótopo par-par es el ${}^{68}_{20}\text{Ca}_{48}$, en concordancia con el resultado teórico obtenido más recientemente utilizando el formalismo de “machine learning” combinado con la estadística de Bayesian.

Abstract

This final work is a study of many-body systems, particularly we analyse neutron-rich Calcium isotopes. The election of this nucleus was motivated by the investigations carried out recently in the *National Superconducting Cyclotron Laboratory*, MI, USA, in 2018, in which the neutron-rich nucleus ${}^{60}_{20}\text{Ca}_{40}$ was discovered. This result opened the possibilities for testing theoretical method for the description of drip line nuclei. Besides, the region of heavy Calcium isotopes is the limit which nowadays Facilities are able to reach, i.e. ${}^{60}_{20}\text{Ca}_{40}$ lies in the experimental frontier. Theoretical nuclear structure calculation is called for to guide the future experiments.

After the introduction to the nuclear structure models, drip line nucleus and continuum states, the Richardson model with a modification which allows to include the continuum energy spectrum was presented. This model solve exactly the pairing Hamiltonian and conserve the number of particles, important aspect because in the studied nucleus the amount of neutron is 50 at most. The election to use the pairing force to model the interaction arises from the fact that it carries the most important particle-particle correlations. It also allows us to study a lot of Calcium isotopes starting from close shells ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ and ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$.

It is found that the last even-even isotope is ${}^{68}_{20}\text{Ca}_{48}$ in close agreement with most recent theoretical results obtained by using machine leaning formalism combined with Bayesian statistic.

Agradecimientos

En primer lugar, a mi director Rolo, por su calidez y paciencia a lo largo del trabajo de Tesis. Sin su buena onda, predisposición y eficiencia, haber llegado hasta este punto habría sido un imposible. También, por los consejos, charlas y compañía en estos dos años de trabajo juntos, tanto en la adscripción como en esta Tesis.

A mis padres, Astrid y Horacio, por su apoyo, el cariño, y la incansable predisposición para intentar solucionar todos mis problemas no académicos. Me allanaron el camino para que pudiera dedicarme a esta profesión tan linda y demandante.

A mis amigos, compañeros y profesores de la facultad, que han hecho mucho fácil esos días de cursado.

A los Jurados de esta Tesis, Luis y Carlos, por tomarse la molestia de leerla.

A Alejandra, que estuvo todo este tiempo presente y acompañándome. En particular en esta Tesis, que me ha ayudado a corregir esos errores que escapaban de mi percepción.

Al resto de mi familia, desperdigada por Funes, Rosario, Roldán y Asunción, por acompañarme en estos años.

A mis amistades de siempre, que aportaron esa necesaria cuota de charlas y distracción que lo forman a uno como persona.

Índice general

1. Introducción	1
2. Brevísima historia de la física nuclear	4
3. Los modelos nucleares	7
3.1. El modelo de la gota líquida	8
3.2. El modelo de gas de Fermi	12
3.3. El modelo de capas	14
3.4. Los códigos	19
3.4.1. GAMOW	20
3.4.2. ANTI	21
3.5. Resultados para el ^{41}Ca	21
3.6. Resultados para el ^{49}Ca	24
4. La línea de goteo	28
4.1. Definición de la línea de goteo y de nucleido	29
4.2. Observación experimental de la línea de goteo	31
4.3. Línea de goteo de neutrones	32
5. El continuo	35
5.1. Descripción	36
5.2. Dispersión y desfase	37
5.3. Densidad de estados del continuo	39
5.4. El código	41
5.5. Resultados para el ^{41}Ca	41

5.6. Resultados para el ^{49}Ca	44
6. La superconductividad y el núcleo atómico	48
6.1. La interacción de apareamiento	49
6.2. Los pares de Cooper y la BCS	52
6.3. El apareamiento en el núcleo	53
6.4. El modelo de Richardson	55
6.5. Nuestro modelo	56
6.6. El código	58
7. Carozo ^{40}Ca	59
7.1. Ajuste del χ	59
7.2. Comportamiento de las energías de Richardson	62
7.3. Probabilidad de Ocupación y Número de Partículas	65
7.4. Energía de ligadura	68
7.5. Energía de separación	70
8. Carozo ^{48}Ca	72
8.1. Ajuste del χ	72
8.2. Comportamiento de las energías de Richardson	75
8.3. Probabilidad de Ocupación y Número de Partículas	77
8.4. Energía de ligadura	80
8.5. Energía de separación	81
9. Conclusión	84
A. Soluciones de Richardson	87
A.1. Hamiltoniano de apareamiento y su solución exacta	87
A.2. Mapeo electroestático de las soluciones	91
Bibliografía	97

Índice de figuras

3.1. Representación esquemática de las deformaciones para distintos valores de λ . Fuente: Fundamentals of Nuclear Physics - Takigawa [7].	9
3.2. Energía de separación de un neutrón para isótopos del Calcio. Datos tomados de AME2016 [19].	10
3.3. Energías de ligadura observadas como función de A y la predicción de la ecuación (3.7). Contribuciones de los distintos términos a la energía de ligadura son también especificados. Fuente: Fundamentals in Nuclear Physics - Basdevant, <i>et al</i> [20].	10
3.4. Distribución de los núcleos observados como función de A y Z . Además, se observan las líneas de goteo estimadas teóricamente. La relación entre A y Z es la predicha por la ecuación (3.17). Fuente: The limits of the nuclear landscape - Erler, <i>et al</i> [22].	12
3.5. El pozo de potencial para neutrones y protones en el modelo de gas de Fermi: todos los estados están ocupados hasta el mismo nivel de energía, pero la profundidad de los dos potenciales es diferente. Fuente: Introduction to Nuclear and Particle Physics - D'Auria [25].	13
3.6. Diferencia en MeV entre el valor medido de B/A y el valor calculado mediante la fórmula empírica de masa como función del número de neutrones N . Los puntos negros más grandes son para los elementos estables. Se aprecian los número mágicos para $N = 20, 28, 50, 82$ y 126 . Las mayores discrepancias, para núcleos doblemente mágicos, son las marcadas. Fuente: Fundamentals in Nuclear Physics - Basdevant, <i>et al</i> [20].	15
3.7. Potencial efectivo con $l = 2$ para el caso del potencial fenomenológico de Woods-Saxon.	17

3.8. Evolución del espectro de energía de partícula simple del neutrón del núcleo ^{136}Xe desde el potencial del oscilador armónico (H.O.), junto con el Woods-Saxon sin (WS) y con (WS+ v_{SO}) el término espín-órbita. Se indica también la paridad P de cada capa mayor del oscilador. Fuente: From Nucleons to Nucleus - Suhonen [26].	19
3.9. Funciones de onda obtenidas para los estados ligados del ^{41}Ca	22
3.10. Parte real (celeste) y parte imaginaria (naranja) de las funciones de onda correspondiente a las resonancias de neutrones del ^{41}Ca	24
3.11. Funciones de onda obtenidas para los estados ligados del ^{49}Ca	25
3.12. Parte real (celeste) y parte imaginaria (naranja) de las funciones de onda correspondiente a las resonancias de neutrones del ^{49}Ca	26
4.1. Mapa de núcleos atómicos existentes y las líneas de goteo predichas. Fuente: National Superconducting Cyclotron Laboratory - Michigan State University. . .	29
4.2. Núcleos ligados observados para $Z \leq 20$. Los diferentes rellenos indican la primera observación del nucleido. Fuente: Reaching the limits of nuclear stability - Thoennessen [48].	31
4.3. Núcleos en la línea de goteo de neutrones y más allá para $Z \leq 20$. Fuente: Reaching the limits of nuclear stability - Thoennessen [48].	33
5.1. Esquema típico de los niveles de un núcleo atómico, en este ejemplo un núcleo par-par. Fuente: Particles and Nuclei - Povh, <i>et al</i> [24].	39
5.2. Desfase δ_l para diferentes valores de l , correspondientes a las funciones de onda resonantes mostradas en la Figura 3.10.	42
5.3. Densidad de estados del ^{41}Ca para diferentes cotas de momento angular l hasta una energía de 1000MeV.	44
5.4. Densidad de estados de las ondas parciales no resonantes con $l = 1$ y $l = 3$ para el núcleo ^{41}Ca	44
5.5. Desfase δ_l para diferentes valores de l , correspondientes a las funciones de onda resonantes mostradas en la Figura 3.12.	45

5.6.	Densidad de estados del ^{49}Ca para diferentes cotas de momento angular l hasta una energía de 1000MeV donde se observa la convergencia $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$	47
5.7.	Densidad de estados de las ondas parciales no resonantes con $l = 1$ y $l = 3$ para el núcleo ^{49}Ca	47
6.1.	Representación esquemática dos órbitas en inversión temporal acopladas a momentos angulares $I = 0$ e $I \neq 0$. Fuente: Nuclear Superfluidity - Broglia, Brink[72].	50
6.2.	Valores experimentales del “gap” de apareamiento nuclear. Fuente: Nuclear Superfluidity - Broglia, Brink[72].	54
7.1.	Error relativo de la energía de ligadura calculada respecto a los datos experimentales para distintos ajustes de χ	61
7.2.	Energías de Richardson para el núcleo ^{50}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en un modelo que incluye al continuo.	63
7.3.	Energías de Richardson para el núcleo ^{50}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en una representación sin el continuo.	63
7.4.	Energía de ligadura versus G para el núcleo ^{50}Ca , en las dos representaciones estudiadas.	64
7.5.	Probabilidad de ocupación para dos isótopos del Calcio, respecto al carozo ^{40}Ca . Las esferas representan cuasipartículas con su nivel de ocupación representado por el grado de “llenado” de la esfera.	65
7.6.	Probabilidad de ocupación para isótopos del Calcio ajustadas mediante la ecuación 7.6.	67
7.7.	Energías de separación de dos neutrones para isótopos del Calcio obtenidas experimentalmente y el ajuste mediante polinomios de grado 1 a 7.	68
7.8.	Energías de ligadura obtenida para diferentes isótopos del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca	69
7.9.	Energía de ligadura para el Calcio partiendo del carozo ^{40}Ca con los diferentes ajustes de χ	69

7.10. Energía de ligadura obtenida para diferentes isótopos impares del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca	70
7.11. Energías de separación de dos neutrón obtenida para diferentes isótopos pares del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca	71
7.12. Energías de separación de un neutrón obtenida para diferentes isótopos impares del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca	71
8.1. Error relativo de la energía de ligadura calculada respecto a los datos experimentales para distintos ajustes de χ	74
8.2. Energía de ligadura versus G para el núcleo ^{54}Ca , en las dos representaciones estudiadas.	75
8.3. Energías de Richardson para el núcleo ^{54}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en un modelo que incluye al continuo.	76
8.4. Energías de Richardson para el núcleo ^{54}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en una representación sin el continuo.	76
8.5. Probabilidad de ocupación para dos isótopos del Calcio, respecto al carozo ^{48}Ca . Las esferas representan cuasipartículas con su nivel de ocupación representado por el grado de “llenado” de la esfera.	77
8.6. Probabilidad de ocupación para isótopos del Calcio ajustadas mediante la ecuación 7.6.	78
8.7. Energías de ligadura obtenida para diferentes isótopos del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca	80
8.8. Energía de ligadura para el Calcio partiendo del carozo ^{48}Ca con los diferentes ajustes de χ	80
8.9. Extremos de la línea de goteo, independizándonos del modelo.	81
8.10. Energía de ligadura obtenida para diferentes isótopos impares del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca	81
8.11. Energías de separación de dos neutrón obtenida para diferentes isótopos pares del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca	82
8.12. Energías de separación de un neutrón obtenida para diferentes isótopos del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca	82

8.13. Tabla de nucleidos en la zona del Calcio, donde se observa la línea de goteo
estimada junto con la probabilidad de existencia. Fuente: Neutron drip line in
the Ca region from Bayesian model averaging - Nazarewicz [59]. 82

Índice de tablas

3.3.1. Parámetros más usuales del potencial de Woods-Saxon.	17
3.3.2. Los números mágicos para el potencial de Woods-Saxon.	18
3.5.1. Parámetros de los potenciales ajustados al núcleo ^{41}Ca	22
3.5.2. Comparación de la energía de ligadura para los niveles de energía correspondientes al núcleo ^{41}Ca respecto al carozo ^{40}Ca . Fuente datos experimentales: National Nuclear Data Center [36].	23
3.5.3. Parte real y parte imaginaria de la energía calculada para los estados resonantes del núcleo ^{41}Ca respecto al carozo ^{40}Ca	23
3.6.1. Parámetros de los potenciales ajustados al núcleo ^{49}Ca	25
3.6.2. Comparación de la energía de ligadura para los niveles de energía correspondientes al núcleo ^{49}Ca . Fuente datos experimentales: National Nuclear Data Center [36].	26
3.6.3. Parte real y parte imaginaria de la energía calculada para los estados resonantes del núcleo ^{49}Ca	27
5.5.1. Energías de los estados resonantes del ^{41}Ca	42
5.5.2. Partición en el espectro del continuo del núcleo ^{41}Ca	43
5.6.1. Parte real y parte imaginaria de la energía calculada para los estados resonantes del núcleo ^{49}Ca	45
5.6.2. Partición en el espectro del continuo del núcleo ^{49}Ca	46
7.1.1. Energías de ligadura experimentales para isótopos del calcio respecto al carozo ^{40}Ca	60
7.1.2. Ajuste de χ a diferentes núcleos mediante distintos métodos.	60
7.1.3. Residuos para los distintos χ	62

7.3.1. Gap y Nivel de Fermi calculado mediante dos métodos distintos partiendo del carozo ^{40}Ca cuyo modelo incluye al continuo. Para ^{60}Ca , ^{62}Ca y ^{64}Ca no existen soluciones para la ecuación (6.21) pues en estos casos $N > 18$ y $\lambda_F > 0$	66
7.3.2. Número de neutrones en los estados discretos y en el continuo para isótopos del Calcio respecto al carozo ^{40}Ca	67
7.3.3. Probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple de los isótopos ^{42}Ca , ^{50}Ca y ^{60}Ca respecto al carozo ^{40}Ca	67
8.1.1. Energías de ligadura experimentales para isótopos del calcio respecto al carozo ^{48}Ca	72
8.1.2. Ajuste de χ a diferentes núcleos mediante distintos métodos.	73
8.1.3. Residuos para los distintos χ	73
8.3.1. Gap y Nivel de Fermi calculado mediante dos métodos distintos partiendo del carozo ^{48}Ca . Para ^{60}Ca , ^{62}Ca y ^{64}Ca no existen soluciones para la ecuación (6.21) pues en estos casos $N > 10$ y $\lambda_F > 0$	78
8.3.2. Número de neutrones en los estados discretos y en el continuo para isótopos del Calcio respecto al carozo ^{48}Ca	79
8.3.3. Probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple de los isótopos ^{50}Ca , ^{54}Ca y ^{60}Ca respecto al carozo ^{48}Ca	79

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de la Física Nuclear es entender la fuerza entre nucleones, la estructura del núcleo, y como los nucleidos interactúan entre ellos y con otras partículas subatómicas [1]. Estas tres cuestiones se encuentran relacionadas entre sí, y no solo confinadas al interés de la física nuclear. El futuro de la ciencia, y en particular de la física nuclear, depende de aquellos problemas fundamentales que aún no tienen solución. En física nuclear, uno de estos problemas es comprender cómo y por qué el núcleo es estable. Establecer la existencia de un núcleo y comprender sus propiedades estructurales, permiten entender las fuerzas fundamentales interactuantes como sus grados de libertad.

Núcleos ricos en neutrones son particularmente interesantes para llevar a cabo este entendimiento. Cuando el número de neutrones comienza a aumentar, generando así una cadena de isótopos de un elemento, eventualmente alcanza el límite de estabilidad, es decir, la línea de goteo de neutrones. El último neutrón ligado en un núcleo de este tipo, se encontrará muy cerca de las energías positivas o de “el continuo” y el efecto de él en un dado nucleido debe ser estudiado cuidadosamente.

Este trabajo presenta varios objetivos, entre ellos la familiarización con la física nuclear y algunos de sus modelos estructurales (*gota líquida* [2], *gas de Fermi* [2] y *modelo de capas nuclear* [3]), el análisis de las energías del continuo y su influencia en los sistemas nucleares, como así también el apareamiento de neutrones en el núcleo atómico y su semejanza con el apareamiento de electrones en un sólido.

En cuanto al propósito fundamental de este trabajo, la solución exacta del Hamiltoniano de apareamiento, desarrollada por Richardson a principios de los 60 [4, 5, 6], permite un

entendimiento de la estructura del núcleo, con posibilidades de incluir las energías del continuo, para así alcanzar la línea de goteo de neutrones [7]. Pese a ser un modelo simple, presenta la posibilidad de disponer de un abanico de ajustes, lo que propicia alcanzar soluciones que estén a la altura de modelos más complejos y recientes.

En primera instancia, en el Capítulo 2 se presenta una muy breve historia de la física nuclear, desde el descubrimiento de los rayos X hasta el descubrimiento del “halo” del núcleo exótico ^{11}Li [8]. Este capítulo puede ser saltado por aquel lector que se encuentre familiarizado con la física nuclear.

Luego, comenzamos el Capítulo 3 presentando tres modelos nucleares que en conjunto, describen gran parte de las propiedades estructurales del núcleo, cada uno bajo sus limitaciones. Este capítulo es útil para entender por qué utilizamos el modelo de capas (“shell model” en inglés) como modelo de cabecera en este trabajo. Al término del capítulo, se presentan los primeros resultados para los núcleos ^{41}Ca y ^{49}Ca , ambos caracterizados por poseer un neutrón sobre los carozos de capa cerrada ^{40}Ca y ^{48}Ca , respectivamente.

Antes de avanzar más hacia los resultados, es importante entender de qué hablamos cuando nos referimos a línea de goteo y qué implicancias tiene esta sobre la estructura nuclear. Para ello, en el Capítulo 4 describimos los fenómenos de la línea de goteo, con la rigurosidad de un informe científico pero permitiendo explicaciones que faciliten el entendimiento de los fenómenos involucrados.

A partir de los resultados del Capítulo 3, principalmente de aquellos que corresponden a los estados resonantes, describimos en el Capítulo 5 el espectro continuo de energía [9]. Dicho capítulo presenta primeramente una breve introducción al continuo y su modelización en el estudio de los núcleos atómicos.

El capítulo siguiente, en el cual hablamos de la superconductividad, es de suma importancia para comprender el modelo utilizado en nuestros cálculos. Evitando entrar en la superconductividad en sólidos [10], presentamos una breve comparación entre el apareamiento de nucleones y el apareamiento de electrones. Además, introducimos operadores importantes para armar luego el Hamiltoniano correspondiente y una introducción cualitativa e histórica a la teoría de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS). Por último, se encuentra la descripción detallada del modelo de Richardson, y la modificación que sobre él aplicaremos para nuestro propósito de alcanzar la línea de goteo.

En los dos capítulos siguientes, se presentan los resultados, discusiones y conclusiones para las dos modelizaciones utilizadas: partiendo del carozo ^{40}Ca , Capítulo 7, y partiendo del carozo ^{48}Ca , Capítulo 8.

El cierre de la tesina se da en el Capítulo 9, donde se resumen los principales resultados y conclusiones obtenidos en los Capítulos 7 y 8, se propone una idea de mejora al modelo utilizado y se analiza el proyecto a futuro. Además, se analizan ciertas implicancias de los resultados obtenidos y la perspectiva de poderlos probar experimentalmente en el futuro.

Capítulo 2

Brevísima historia de la física nuclear

La “era” de lo que hoy llamamos física moderna, comenzó con dos descubrimientos accidentales. En 1895, el físico alemán Wilhelm Conrad Röntgen descubre los *rayos X*, los cuales no solo traspasaban objetos como su mano, sino que también ionizaban el aire. En particular, el experimento de “iluminar” con rayos X una película fosforescente que él realizó llamó la atención del físico francés Antoine Henri Becquerel, experto en el fenómeno de fosforescencia. Esto lo llevó a preguntarse si los materiales fosforescentes, como las sales de uranio, eran inducidos a emitir rayos *X* en la presencia de luz solar. Pese a que esta primera suposición estaba errada, tuvo como consecuencia el descubrimiento accidental de la *radiactividad* en 1886.

Con el correr del año 1897, J. J. Thomson demostró mediante experimentaciones directas que pequeñas partículas negativas (*electrones*) podían extraerse de los átomos, dejando atrás residuos con carga positiva, una de las primeras indicaciones de que los átomos tenían estructura interna. Hacia el final del siglo, Thomson dio origen a su modelo atómico de “pastel de pasas”, constituido de una masa positiva distribuida en todo el cuerpo, con cargas negativas incrustadas actuando como pasas. Para entonces, los físicos ya habían descubierto tres tipos de radiación proveniente de los átomos: alfa, beta y gamma.

En 1906, el físico neozelandés Ernest Rutherford realiza sus estudios de la estructura interna de los átomos disparando sobre estos partículas de ${}^2\text{He}$ en el “Cavendish Laboratory” de la Universidad de Cambridge, cuyo director era ni más ni menos que J. J. Thomson. Lo interesante surge por el hecho de que las observaciones de este experimento se contradecían con el modelo que Thomson había establecido. Ya en 1911, propone entonces un modelo en el cual la carga positiva del átomo estaba concentrada en un pequeño centro o *núcleo*, y la carga negativa está

distribuida a lo largo de una esfera de radio comparable con el atómico. La justificación de estabilidad de este sistema fue dado por Niels David Bohr y su cuantificación de los niveles de energía del hidrógeno en 1913 [11].

En cuanto al núcleo atómico, este centro de carga positiva, Rutherford mostró en sus experimentos que el radio era del orden de 10^{-12} cm. Pero el problema de su estabilidad residía en el hecho de que la densidad de este, para átomos livianos, es del orden de 10^{12} g/cm³. Para núcleos cuya masa es muy cercana a un entero A , era necesario asumir que el núcleo contenía A protones. Pero si este fuera el caso, la carga en el núcleo debiera ser A y diferiría del número atómico Z , que siempre es la mitad o menos que A . Para evitar este escollo, se supuso que el núcleo estaba compuesto por A protones y $A - Z$ electrones, lo que daba una carga total positiva de Z y los electrones contribuían de manera despreciable en la masa. Esta suposición encontró problemas pues no lograba describir correctamente la estructura fina del núcleo, es decir, su espín.

Hacia principios de 1920, Rutherford propone que los electrones no se encontraban libres en el núcleo, sino combinados con los protones formando una partícula neutral, llamada *neutrón*. La dificultad de esto era experimental, pues no había forma de detectar partículas sin carga. Finalmente, en 1932, como uno de los resultados de la desintegración de núcleos a través de partículas alfa, Chadwick [12] demostró la existencia del neutrón.

En 1935, Hideki Yukawa, especializado en física atómica y familiarizado con las herramientas cuánticas, propuso una original teoría [13] que explicaba la naturaleza de la fuerza nuclear fuerte a través del intercambio de partículas, llamadas piones. Esta fuerza explica porque el núcleo no se desintegra bajo la influencia de la repulsión entre protones. Con la idea de Yukawa, el modelo moderno del núcleo estaba casi completo. Siguiendo esta idea, el primer modelo que describió las propiedades nucleares fue el de la *gota líquida* (“liquid drop model” en inglés) desarrollado en 1937 por George Gamow junto con Niels Bohr en Copenhague. El modelo surge de la observación de que las fuerzas nucleares exhiben propiedades de saturación como en los líquidos, sumado a que el núcleo presenta baja compresibilidad y una superficie nuclear bien definida.

Poco después del proyecto Manhattan, de las bombas atómicas y del fin de la Segunda Guerra Mundial, tenemos dos hitos importantes para la física nuclear. El primero a cargo de Hans Bethe y George Gamow, que logran explicar la nucleosíntesis del Big Bang [14], y el

segundo, que es el descubrimiento del decaimiento del neutrón a manos de Arthur Snell y Leonard Miller.

Pese a que el modelo de la gota líquida describía ciertos fenómenos nucleares, no fue hasta 1949, cuando Maria Goeppert Mayer y Hans Jensen desarrollan el *modelo de capas nuclear* (“nuclear shell model” en inglés), que logra explicar la existencia de números mágicos. Este modelo fue propuesto primeramente en 1932 [15] por Dmitry Ivanenko en conjunto con E. Gapon.

El avance de la física nuclear estuvo dormido durante un tiempo, en el cual se avanzó en los desarrollos y las mejoras experimentales. Pero resurgiría en 1985 con el descubrimiento del “Halo” nuclear del núcleo exótico el ^{11}Li en Japón [8]. Estos núcleos se caracterizan por exhibir fenómenos inusuales, que exceden a la comprensión de los modelos básicos de física nuclear, y abre un nuevo abanico de posibilidades y de fronteras en el estudio de los núcleos atómicos. Este descubrimiento también fue el impulsor de construcción de nuevos laboratorios y la ampliación de facilidades actuales para acceder a núcleos exóticos más pesados y de interés astrofísico. Ejemplos de ellos son: “Radioactive ion beam line in Lanzhou” en “National Laboratory of Heavy Ion Accelerator Lanzhou”, China, y “National Superconducting Cyclotron Laboratory” en “Michigan State University”, Estados Unidos.

Capítulo 3

Los modelos nucleares

*“La naturaleza crea líneas curvas,
mientras que los humanos líneas rectas.”*

Hideki Yukawa

Existen esencialmente dos clases de modelos nucleares. La primera clase asume que los nucleones interactúan fuertemente en el interior del núcleo y su camino libre medio es pequeño. Esta es una situación idéntica a la de las moléculas en un líquido, por lo que el modelo de la gota líquida pertenece a esta clase. Estos son llamados modelos colectivos [16] y estudian fenómenos que envuelven al núcleo como un todo.

La segunda clase, es una cuyo modelo es de partículas independientes y asume que el principio de exclusión de Pauli restringe las colisiones de los nucleones dentro del núcleo, llevando a un camino libre medio más grande. Las distintas formas del modelo de capas pertenecen a esta clase.

Por otra parte, existe un modelo unificado, que combina los grados de libertad colectivos del modelo de la gota líquida, y los grados de libertad individuales de los nucleones como en el modelo de capas. Este, desarrollado principalmente por Aage Bohr y Ben Mottelson [16, 17], escapa a lo presentado en este trabajo.

Hoy en día tenemos una clara noción experimental de que el núcleo puede exhibir tanto fenómenos colectivos como de partículas independientes, por lo que cada modelo es útil a la hora de explicar un grupo específico de propiedades nucleares.

3.1. El modelo de la gota líquida

El modelo de la gota líquida es el primero que describe las propiedades nucleares. Surge de la observación de que las fuerzas nucleares exhiben propiedades de saturación. Esto se aprecia particularmente en la energía de ligadura por nucleón, $E_{Bin}(A, Z)/A$. Así mismo, el núcleo presenta baja compresibilidad y una superficie nuclear bien definida.

En un líquido, la distancia media entre dos partículas es aquel valor donde la energía se minimiza. Esta distancia, para el caso de una interacción nuclear, es del orden de $0,7 fm$. Los nucleones se encuentran en general más separados que este valor según evidencia experimental. Esto es porque son fermiones, y por lo tanto se rigen por la estadística de Fermi-Dirac y debemos considerarlos como un líquido de Fermi. Combinando el principio de exclusión de Pauli con el principio de incertidumbre de Heisenberg, cada nucleón interactúa con un número limitado de nucleones.

El núcleo en esta teoría se modeliza como una gota con superficie $R(\theta, \phi) = R_0$. Pero si tenemos en cuenta deformaciones propias del núcleo, se puede escribir

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right) \quad (3.1)$$

donde $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ describe los armónicos esféricos. Oscilaciones de pequeña amplitud cuando $\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda\mu}(t)$ nos aproximan a un Hamiltoniano del oscilador armónico, que en la dinámica colectiva toma la forma [18]

$$H = \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{B_\lambda}{2} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + \frac{C_\lambda}{2} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) \quad (3.2)$$

donde los parámetros $\alpha_{\lambda\mu}$ suelen denominarse como *parámetros de deformación* [7]. En la Figura 3.1 presentamos una ilustración de los diferentes modos en función de $\alpha_{\lambda\mu}$.

La energía de ligadura en un núcleo presenta una variación suave con A y Z (Ver sección 7.1 de [18]), y el modelo de la gota líquida logra describir esto. Pese a que esto sucede en gran cantidad de núcleos, las propiedades internas de los núcleos modifican unos cuantos resultados. Existen manifestaciones del principio de exclusión de Pauli gobernando la ocupación de los niveles de partícula simple, de un campo medio y de interacciones nucleares residuales. Por ejemplo, los nucleones preferentemente forman pares en el núcleo bajo la influencia de la fuerza

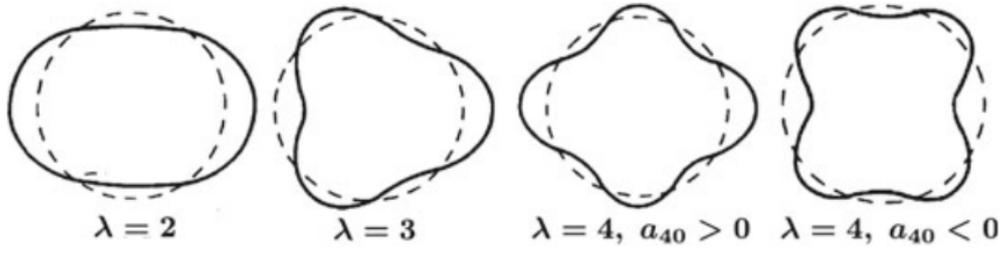


Figura 3.1: Representación esquemática de las deformaciones para distintos valores de λ . Fuente: Fundamentals of Nuclear Physics - Takigawa [7].

atractiva de corto rango nucleón-nucleón, como veremos en los capítulos siguientes.

Este modelo, nos permite expresar la energía de ligadura como

$$E_{Bin}(A, Z) = ZM_Pc^2 + NM_n c^2 - M'({}_Z^A X_N)c^2 \quad (3.3)$$

La energía de ligadura con la cual el cluster ${}_{Z'}^{A'} Y_{N'}$ está ligado al núcleo ${}_{Z}^A X_N$ (generalmente $A' \ll A$, $Z' \ll Z$, $N' \ll N$) es ($A'' = A - A'$, $Z'' = Z - Z'$, $N'' = N - N'$)

$$S_Y = M'({}_{Z'}^{A'} Y_{N'})c^2 + M'({}_{Z''}^{A''} U_{N''})c^2 - M'({}_{Z}^A X_N)c^2 \quad (3.4)$$

Es decir, la diferencia de masa entre los constituyentes (${}_{Z'}^{A'} Y_{N'}$ y ${}_{Z''}^{A''} U_{N''}$) y el núcleo final ${}_{Z}^A X_N$. Esta expresión, reescrita en función de la energía de ligadura, nos permite definir la energía de separación de un protón y un neutrón como

$$S_p = E_{Bin}(A, Z) - E_{Bin}(A - 1, Z - 1) \quad (3.5)$$

$$S_n = E_{Bin}(A, Z) - E_{Bin}(A - 1, Z) \quad (3.6)$$

En la Figura 3.2 se grafican los resultados experimentales de la energía de separación de un neutrón para isótopos del Calcio, donde se aprecia que cuesta más energía separar un neutrón de un núcleo con número par de neutrones, que uno con número impar. Esto es una prueba de que núcleos pares-pares son más ligados que aquellos impares-pares.

En cuanto a sus limitaciones, el modelo de la gota líquida no describe la existencia de números mágicos de estabilidad en el núcleo. Pero sí logra describir lo que llamamos línea de

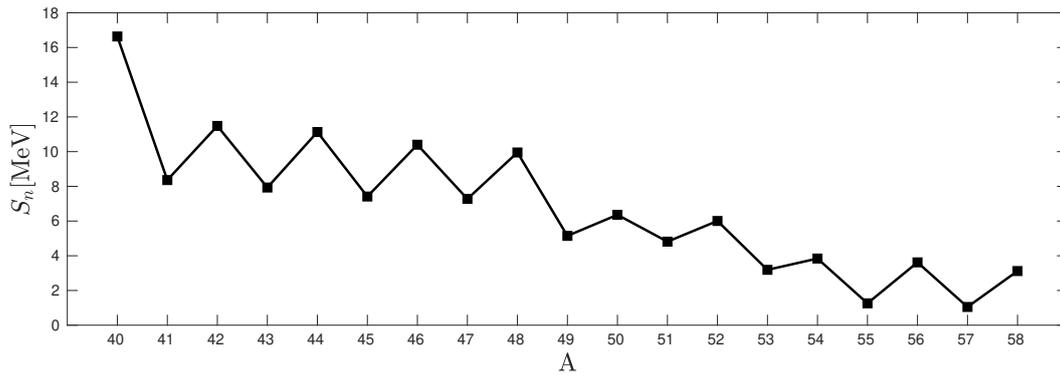


Figura 3.2: Energía de separación de un neutrón para isótopos del Calcio. Datos tomados de AME2016 [19].

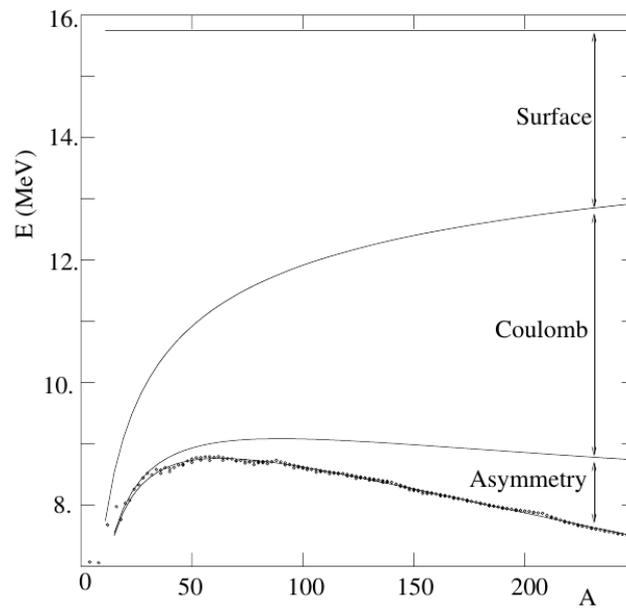


Figura 3.3: Energías de ligadura observadas como función de A y la predicción de la ecuación (3.7). Contribuciones de los distintos términos a la energía de ligadura son también especificados. Fuente: Fundamentals in Nuclear Physics - Basdevant, *et al* [20].

estabilidad. Partiendo de la relación de energía de ligadura de Bethe-Weizsäcker [18]

$$\begin{aligned}
 E_{Bin}(A, Z) = & a_V A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_A(A-2Z)A^{-1} + 0 \\
 & + a_p A^{-1/2} \\
 & - a_p A^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ilustrada en la Figura 3.3, donde el primer y segundo término son los de volumen y superficie, el tercer término representa la energía de Coulomb, el cuarto término es aquel que tiende a ubicar a los núcleos estables sobre la diagonal de la tabla de nucleidos y el quinto es originado

de las correlaciones de apareamiento, con + para los par-par, +0 para los par-impar, - para los impar-impar, con los siguientes parámetros ajustados por Wapstra en 1958 [21]

$$a_V = 15,85\text{MeV} \quad (3.8)$$

$$a_s = 18,34\text{MeV} \quad (3.9)$$

$$a_c = 0,71\text{MeV} \quad (3.10)$$

$$a_A = 23,21\text{MeV} \quad (3.11)$$

$$a_p = 12\text{MeV} \quad (3.12)$$

obtenemos una ecuación para la masa nuclear [18], que para cada valor de A representa una ecuación cuadrática en Z ,

$$E_{Bin}(A, Z) = xA + yZ + zZ^2 \begin{array}{l} +a_p A^{-1/2} \text{ núcleos par-par} \\ +0 \text{ núcleos par-impar} \\ -a_p A^{-1/2} \text{ núcleos impar-impar} \end{array} \quad (3.13)$$

donde

$$x = M_n c^2 - a_v + a_A + a_s A^{-1/3} \quad (3.14)$$

$$y = (M_p - M_n) c^2 - 4a_A - a_c A^{-1/3} \quad (3.15)$$

$$z = a_c A^{-1/3} + 4a_A A^{-1} \quad (3.16)$$

donde M_n es la masa del neutrón, M_p la masa del protón y a_i son los coeficientes de la ecuación de Bethe-Weizsäcker.

Podemos determinar entonces, para cada valor de A , el núcleo con la mayor energía de ligadura posible, que estará dado por la relación

$$Z = \frac{A/2}{1 + \frac{1}{4}(a_c/a_A)A^{2/3}} = \frac{(Z + N)/2}{1 + 0,007(Z + N)^{2/3}} \quad (3.17)$$

En la Figura 3.4, observamos esta relación junto con los resultados experimentales.

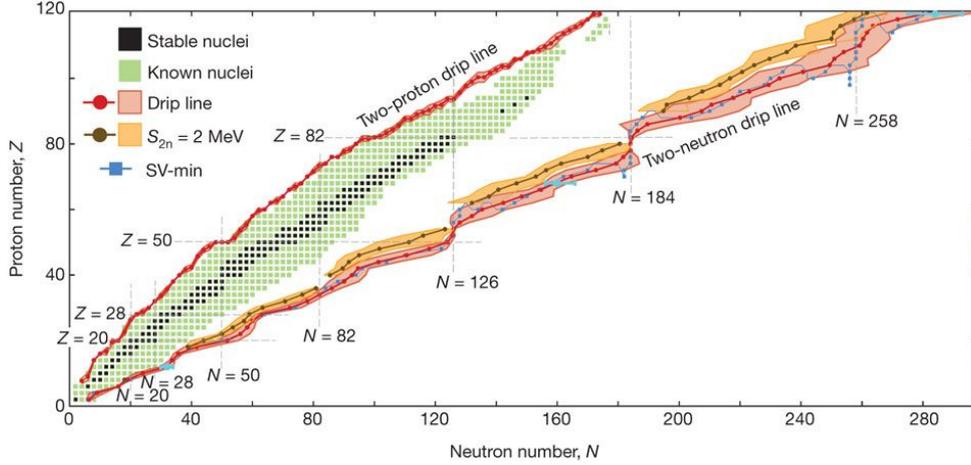


Figura 3.4: Distribución de los núcleos observados como función de A y Z . Además, se observan las líneas de goteo estimadas teóricamente. La relación entre A y Z es la predicha por la ecuación (3.17). Fuente: The limits of the nuclear landscape - Erler, *et al* [22].

3.2. El modelo de gas de Fermi

Este modelo está basado en el hecho de que los nucleones se mueven casi como partículas libres dentro del núcleo a causa del principio de exclusión de Pauli. Los protones y neutrones que componen el núcleo son vistos como dos sistemas independientes desde el modelo de gas de Fermi. Como son partículas de espín $1/2$ obedecen la estadística de Fermi-Dirac.

Por ser gas de Fermi, sabemos que a temperatura cero, el número de estados ocupados hasta la energía de Fermi serán [23]

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (3.18)$$

como los sistemas de neutrones y protones son independientes, tendremos que

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad \text{Para los neutrones} \quad (3.19)$$

$$Z = \frac{V (p_F^p)^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad \text{Para los protones} \quad (3.20)$$

con $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A$. Si asumimos que el potencial de los protones y neutrones tienen el mismo radio, obtenemos que para núcleos donde $Z = N = A/2$,

$$p_F = p_F^n = p_F^p \approx 250 \text{ MeV}/c \quad (3.21)$$

y entonces, la energía de Fermi para los dos sistemas será

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33\text{MeV} \quad (3.22)$$

con M la masa del nucleón.

Para obtener una expresión de la energía cinética, partimos de que la del núcleo se puede escribir en función de la energía cinética media de protones y neutrones como

$$E_{cin}(N, Z) = N\langle E_n \rangle + Z\langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} [N \cdot (p_F^n)^2 + Z \cdot (p_F^p)^2] \quad (3.23)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (3.19) y (3.20) junto con (3.21) en esta expresión, y luego desarrollamos en serie de Taylor alrededor de $N - Z$, obtenemos [24]

$$E_{cin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right] \quad (3.24)$$

El primer término contribuye al término de volumen en la fórmula de Bethe-Weizsäcker mientras que el segundo término es una corrección para el caso donde $N \neq Z$.

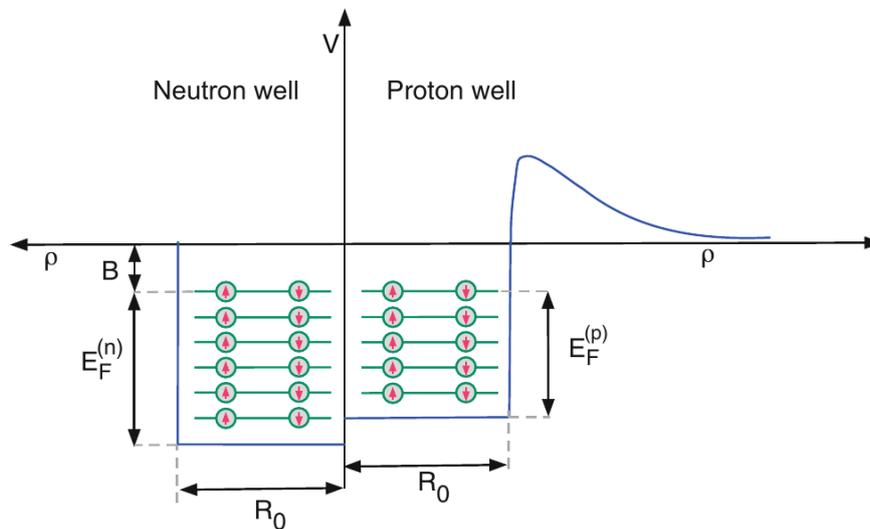


Figura 3.5: El pozo de potencial para neutrones y protones en el modelo de gas de Fermi: todos los estados están ocupados hasta el mismo nivel de energía, pero la profundidad de los dos potenciales es diferente.

Fuente: Introduction to Nuclear and Particle Physics - D'Auria [25].

Pese a su simplicidad, el modelo es capaz de explicar, por ejemplo, que en núcleos livianos la relación de los núcleos ligados sea $Z \approx N$, pues de esta manera la energía es disminuida. Para núcleos pesados, la fuerza de Coulomb hace que la caja de los protones sea menos profunda que

la de los neutrones como vemos en la Figura 3.5, y como consecuencia, el número de protones es menor al de neutrones, en acuerdo con los datos experimentales. Otra característica que se explica es la abundancia de núcleos par-par estables en comparación con la inexistencia de los impar-impar. Esto sucede pues cuando tenemos un nucleón solo en un nivel, el estado posible más bajo para un nucleón subsecuente es en ese mismo nivel. En otras palabras, en un núcleo impar-impar tenemos un protón aislado y un neutrón aislado, cada uno en su caja. Pero entre estos estados, generalmente existe una diferencia de energía, creando así la posibilidad de que uno de los nucleones, mediante la emisión β , pase al estado de mínima energía disponible en la otra caja.

Este modelo de gas de Fermi es generalmente usado para describir sistemas a gran escala [23] (electrones de conducción en un metal, nucleones en estrellas de neutrones, electrones en enanas blancas, etc.) donde la cuantización del momento angular puede ser despreciada. El sistema de nucleones en el núcleo es muy chico por lo que posee niveles de energía discretos con diferente momento angular orbital l .

3.3. El modelo de capas

Una de las indicaciones más obvias de la existencia de una estructura de capas en un núcleo se obtiene al realizar una comparación con el ordenamiento de los electrones en el átomo. Si se estudia la energía de ionización de un átomo, se observan claramente la existencia de números mágicos en 2, 10, 18, 36, 54, 86. Este comportamiento se explica porque la energía de ionización aumenta suavemente cuando se completan las capas electrónicas. Cuando comenzamos a llenar una nueva capa, el último electrón se encuentra en una órbita menos ligada que el anterior, entonces la energía de ionización del electrón muestra rápidas variaciones cuando una capa electrónica es cerrada.

La cantidad análoga en el caso nuclear es la energía de separación S_n (S_p) del neutrón (protón), definida en la ecuación (3.6). Para la mayoría de los núcleos, $S_p \approx S_n \approx 8\text{MeV}$. Esta energía de separación es máxima para los números mágicos 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (Ver Figura 3.6). Estos saltos en la energía de excitación o separación tienen su reminiscencia en química: los gases nobles están particularmente arraigados a sus electrones, mientras que los metales alcalinos presentan energías de ionización bajas.

Entonces, pese a que existen diferencias entre el movimiento de los electrones en el átomo y los nucleones en el núcleo, la presencia de un potencial nuclear medio actuando sobre los nucleones es clara. La aproximación que haremos entonces es pasar de un sistema de partículas altamente interactuantes a un sistema de *cuasipartículas* levemente interactuantes. Las interacciones restantes, llamadas *interacciones residuales*, pueden ser tratadas mediante teoría de perturbaciones.

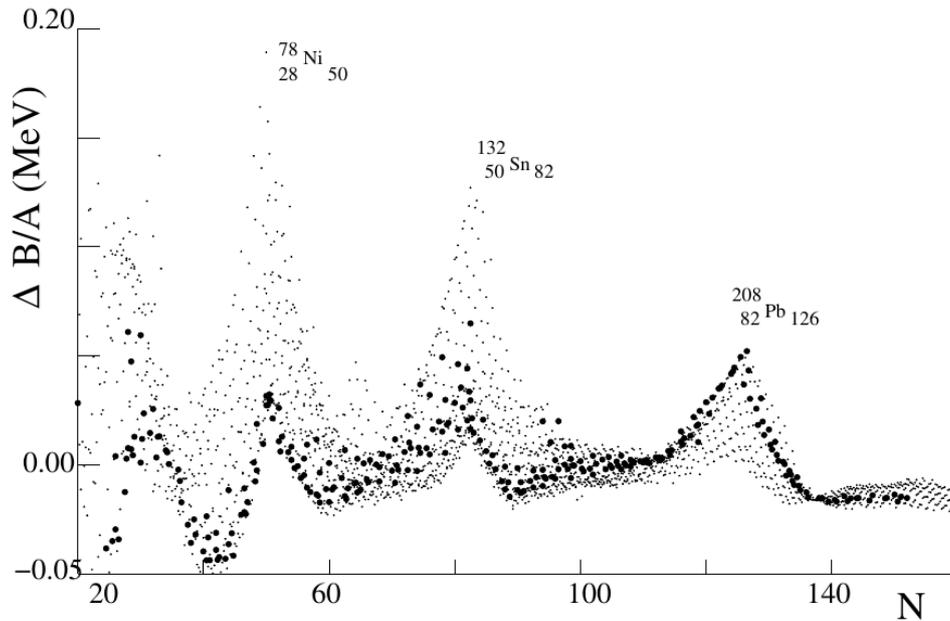


Figura 3.6: Diferencia en MeV entre el valor medido de B/A y el valor calculado mediante la fórmula empírica de masa como función del número de neutrones N . Los puntos negros más grandes son para los elementos estables. Se aprecian los números mágicos para $N = 20, 28, 50, 82$ y 126 . Las mayores discrepancias, para núcleos doblemente mágicos, son las marcadas. Fuente: Fundamentals in Nuclear Physics - Basdevant, *et al* [20].

Trataremos las cuasipartículas de *campo medio* (o Hartree-Fock¹). Tomemos el hamiltoniano nuclear de varias partículas H [26],

$$H = T + V = \sum_{i=1}^A t(\mathbf{r}_i) + \sum_{i,j=1;i<j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \sum_{i=1}^A \frac{-\hbar^2}{2m_N} \nabla_i^2 + \sum_{i,j=1;i<j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (3.25)$$

donde m_N es la masa de un nucleón² y \mathbf{r}_i es la posición del nucleón i -ésimo. Si ahora restamos y sumamos la energía potencial de las partículas libres interactuando con un potencial central,

¹Método de aproximación de fines de la década 1920, luego del descubrimiento de la ecuación de Schrödinger (1926). Hartee introdujo un procedimiento, que llamó método “self-consistent field”, para calcular funciones de onda y energía de átomos e iones.

²Asumimos que la masa del protón y el neutrón son la misma, $m_N c^2 \approx 940 \text{ MeV}$

esto es $V_{MF} = \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r}_i)$, obtenemos

$$H \equiv H_{MF} + V_{RES} \quad (3.26)$$

donde

$$H_{MF} = \sum_{i=1}^A [t(\mathbf{r}_i) + v(\mathbf{r}_i)] \equiv \sum_{i=1}^A h(\mathbf{r}_i) \quad (3.27)$$

es el llamado *Hamiltoniano nuclear de campo medio*, y

$$V_{RES} = \sum_{i,j=1;i<j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r}_i) \quad (3.28)$$

es la *interacción residual*.

En la *aproximación de campo medio*, cada nucleón se encuentra moviéndose en un campo externo creado por los $A - 1$ restantes. Este campo es [26]

$$V_{MF} = \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r}_i), \quad v(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} dT \sum_{j=1;j \neq i}^A v(\mathbf{r}_i(T), \mathbf{r}_j(T)) \quad (3.29)$$

Entonces, la ecuación de Schrödinger a resolver es

$$H_{MF}\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = E\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (3.30)$$

donde $\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \phi_{\alpha 1}(\mathbf{r}_1)\phi_{\alpha 2}(\mathbf{r}_2)\dots\phi_{\alpha A}(\mathbf{r}_A)$, siendo $\phi_{\alpha j}(\mathbf{r}_j)$ la función de onda de una cuasipartícula. Si reemplazamos esta expresión en la ecuación de Schrödinger, tendremos A ecuaciones idénticas, una para cada nucleón

$$h(\mathbf{r})\phi_\alpha(\mathbf{r}) = \varepsilon_\alpha\phi_\alpha(\mathbf{r}), \quad h(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}) + v(\mathbf{r}) = \frac{-\hbar^2}{2m_N}\nabla^2 + v(\mathbf{r}) \quad (3.31)$$

donde ε_α satisfacen que $E = \sum_{\alpha=1}^A \varepsilon_\alpha$.

El potencial fenomenológico más frecuentemente usado para modelizar al campo medio $v(\mathbf{r})$ es el correspondiente al oscilador armónico tridimensional

$$v_{HO}(\mathbf{r}) = -V_1 + \frac{1}{2}m_N\omega^2r^2 \quad (3.32)$$

Para este potencial, la ecuación de Schrödinger es resuelta analíticamente. La energía depende entonces

$$E_{HO} = (N + 3/2)\hbar\omega \quad (3.33)$$

donde $N = 2n + l$. Entonces, existen estados con diferentes valores de $n; l$ pero que poseen el mismo N , por lo que el sistema está degenerado en este sentido.

Los valores de ocupación entonces para este potencial son 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, ... los cuales, excepto los tres primeros, difieren de los números mágicos obtenidos experimentalmente.

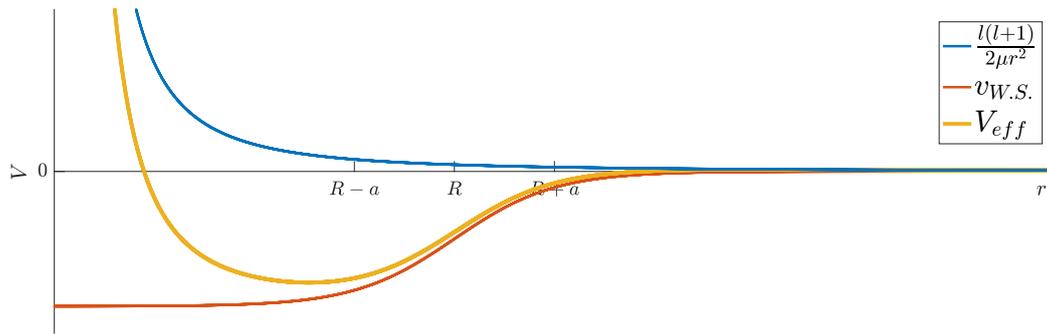


Figura 3.7: Potencial efectivo con $l = 2$ para el caso del potencial fenomenológico de Woods-Saxon.

Otro potencial fenomenológico utilizado es el desarrollado por Roger Woods y David Saxon en 1952 [27], el cual hoy llamamos *potencial de Woods-Saxon*, una opción más realista. Este potencial se ajusta en el sentido de la distribución de materia nuclear, teniendo la forma

$$v_{WS}(\mathbf{r}) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (3.34)$$

con los parámetros mas usuales [26]

$$R = r_0 A^{1/3} = 1,27 A^{1/3} \text{ fm} \quad \text{Radio Nuclear}$$

$$a = 0,67 \text{ fm} \quad \text{Superficie de Difusión}$$

$$V_0 = (51 \pm 33 \frac{N-Z}{A}) \text{ MeV} \quad \text{con } + \text{ para protones y } - \text{ para neutrones}$$

Tabla 3.3.1: Parámetros más usuales del potencial de Woods-Saxon.

En la Figura 3.7 ilustramos el potencial efectivo para el caso del neutrón, donde el único efecto repulsivo es la barrera centrífuga.

En este potencial, al contrario de lo que pasaba con el potencial armónico, estados con diferentes valores de $n; l$ tendrán diferente energía (se rompe la degeneración). Como observamos en la Tabla 3.3.2, nuevamente este potencial describe los números mágicos 2, 8, 20, pero discrepa en los demás. La última línea de la tabla muestra el número de nucleones de una misma especie que resulta de ir llenando los niveles más bajos, hasta la energía E_{nl} .

N	0	1	2	2	3	3	4	4	4	...
nl	$0s$	$0p$	$0d$	$1s$	$0f$	$1p$	$0g$	$1d$	$2s$...
Degeneración	2	6	10	2	14	6	18	10	2	...
Estados con $E \leq E_{nl}$	2	8	18	20	34	40	58	68	70	...

Tabla 3.3.2: Los números mágicos para el potencial de Woods-Saxon.

Es claro que algo está faltando aún. Lo que no consideramos hasta ahora es la interacción *espín-órbita*, acoplando el momento angular orbital y el momento angular intrínseco de espín.

Introducimos formalmente este acople de la misma manera en que se introduce en el caso de la interacción de los electrones en el átomo. La diferencia radica en que a nivel atómico, tiene un origen electromagnético y es la causante de la estructura fina, del orden de los meV, tanto que las diferencias entre los niveles de energía son del orden de los eV. En cambio, en el caso del núcleo, la separación causada por el acople es del orden de los MeV, igual que la separación entre los niveles de energía. La forma que el potencial toma es

$$v(\mathbf{r}) = v_{central}(r) + V_{SO}(r) \frac{\langle \hat{L} \cdot \hat{S} \rangle}{\hbar^2} \quad (3.35)$$

La combinación del momento angular orbital \hat{L} y el espín \hat{S} da un momento angular total \hat{J} con autovalores $j\hbar = (l \pm 1/2)\hbar$, y entonces

$$\frac{\langle \hat{L} \cdot \hat{S} \rangle}{\hbar^2} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2} = \begin{cases} l/2 & \text{para } j = l + 1/2 \\ -(l+1)/2 & \text{para } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (3.36)$$

Esto lleva a una energía de separación ΔE_{SO} que crece linealmente con el momento angular orbital como

$$\Delta E_{SO} = \frac{2l+1}{2} V_{SO}(r) \quad (3.37)$$

Experimentalmente se observó que el estado con $l + s$ es más ligado que su compañero con $l - s$, de lo que se deduce $V_{SO}(r)$ es negativo y del orden de los MeV. De esta manera, se obtienen teóricamente (Ver Figura 3.8) los número mágicos que experimentalmente (Ver Figura 3.6) se observaban.

Usualmente, el momento angular total j del nucleón se denota con un índice extra. Por ejemplo, el estado $1f$ se divide en $1f_{7/2}$ y $1f_{5/2}$. Entonces, el nivel nl_j está $(2j + 1)$ veces degenerado. Además, existen dos tipos de notaciones para el índice n , aquella que no toma al cero de la función de onda como un nodo más, entonces $n \geq 0$, y aquella que sí lo toma como un nodo más, de forma que $n^* = n + 1 \geq 1$. En este trabajo, tomaremos la notación de n^* .

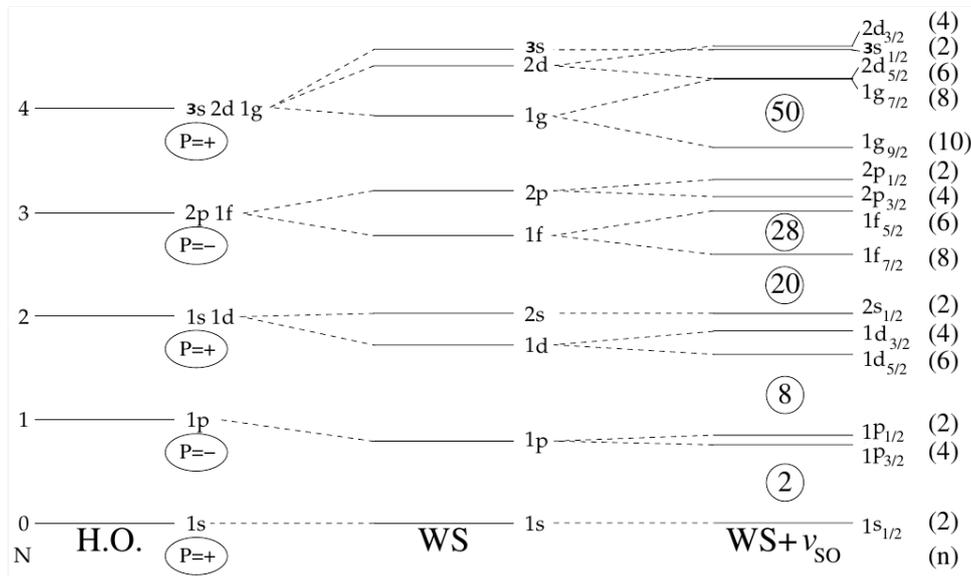


Figura 3.8: Evolución del espectro de energía de partícula simple del neutrón del núcleo ^{136}Xe desde el potencial del oscilador armónico (H.O.), junto con el Woods-Saxon sin (WS) y con (WS+ v_{SO}) el término espín-órbita. Se indica también la paridad P de cada capa mayor del oscilador. Fuente: From Nucleons to Nucleus - Suhonen [26].

3.4. Los códigos

A la hora de modelizar el sistema en base a potenciales fenomenológicos, se utilizaron dos códigos principales: el GAMOW, Ref. [28], y el ANTI, Ref. [29]. Ambos códigos fueron programados en el lenguaje Fortran 77. La finalidad principal de ambos es resolver la ecuación radial de Schrödinger

$$u''(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - v(r) \right] u(r) = 0 \tag{3.38}$$

con $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$, l el momento angular orbital y $v(r)$ un potencial central.

3.4.1. GAMOW

En el caso del código GAMOW, para los neutrones el potencial $V(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu}v(r)$ es modelizado por un potencial nuclear de rango corto. Este potencial puede ser una suma de cuatro diferentes formas radiales de potencial multiplicados por una intensidad compleja, donde en nuestro caso se utilizó una combinación del potencial de Woods-Saxon junto con el término espín-órbita sin componente imaginaria.

El método para calcular las energías se basa en obtener dos soluciones de la ecuación de onda radial integrando la ecuación (3.38) numéricamente usando el método de Fox-Goodwin [30] con valores fijados para los parámetros de los potenciales. Una solución interna u_i satisface la condición de que $u(0) = 0$ y una solución externa u_e satisface la condición (Ref. [31, 32, 33])

$$u_e(RM)O_l'(k \times RM) - u_e'(RM)O_l(k \times RM) = 0 \quad (3.39)$$

donde O_l representa a las funciones de onda salientes y divergentes, RM es cualquier distancia más allá del rango b donde el potencial nuclear se anula, $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}E$, con μ la masa reducida de las partículas interactuantes y E la energía compleja.

Al contrario de las condiciones usuales de la Mecánica Cuántica que requieren que $u(r)$ decaiga asintóticamente a cero y generan soluciones con número de onda puramente imaginario positivo, y como $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}E$, se obtienen energías negativas que describen a los estados ligados, la condición de contorno (3.39), también representa una condición asintótica de una onda puramente saliente (nótese que las soluciones de dispersión contienen una combinación lineal de onda saliente y entrante). Esta condición de contorno da como autovalor un número de onda que es complejo, y por ende con energía compleja. Estas energías son las consideradas *resonancias*, pero solo aquellas cuya parte imaginaria es considerablemente menor que la parte real y no se observa un comportamiento divergente, es decir, son localizadas, son las que tienen relevancia física [34].

La solución interna se calcula integrando desde 0 hasta R_m (radio de “matching”) y la solución externa en cambio se calcula integrando desde RM hasta R_m . Finalmente, en R_m , las soluciones se pegan y se comparan las derivadas logarítmicas L_i y L_e . Cambios en los parámetros son realizados buscando minimizar la diferencia $L = L_i - L_e$.

El código GAMOW se utilizó para ajustar los parámetros de los potenciales fenomenológicos

de forma tal que se reproduzcan los niveles de energías experimentales.

En cuanto al funcionamiento de este código, por información de entrada se encuentran los parámetros estimados del potencial de Woods-Saxon y el espín-órbita, la carga y la masa del núcleo objetivo (en nuestro caso, primero el ^{40}Ca y luego el ^{48}Ca), la carga y la masa del proyectil (en nuestro caso un neutrón) y los números cuánticos l y j de los niveles de energía que uno espera calcular junto a una energía semilla de cada nivel. El código entrega entonces las energías de los niveles corregidas mediante la minimización de la diferencia entre las derivadas logarítmicas de las soluciones internas y externas.

3.4.2. ANTI

A comparación del código GAMOW, este código resuelve la ecuación radial de Schrödinger utilizando métodos de perturbación por partes, en particular el algoritmo CPM(2) [35] (“Continuous Passive Motion”), el cual le permite tener mayor precisión en el cálculo de estados anti-ligados y resonancias, es decir, estados no ligados con una vida media asociada. Es por ello que este código se utiliza para calcular las resonancias, especialmente aquellas anchas, las cuales calcula con mayor precisión que GAMOW, y los estados del continuo, los cuales no son calculados por GAMOW.

Para el funcionamiento de este código los parámetros de entrada son los mismos que el anterior, y en nuestro caso solo se le entrega los números cuánticos de un único nivel y una única energía semilla. Con estos datos, el código entrega la parte real e imaginaria de la energía del nivel correspondiente a los parámetros de los potenciales ingresados.

Este es el código que será utilizado para generar la densidad de estados en el continuo.

3.5. Resultados para el ^{41}Ca

El núcleo del isótopo ^{41}Ca puede estudiarse como un carozo compuesto por el núcleo ^{40}Ca , formado por 20 neutrones, 20 protones y $S_n = 15,635\text{MeV}$, más un neutrón, el cual siente el campo medio generado por los otros 20 neutrones. Entonces, mediante el uso de los algoritmos descritos en la sección anterior, se buscó reproducir la energía de partícula simple de los niveles de energía de los estados ligados obtenidos de la Ref. [36], y respetar el comportamiento de aquellos estados que son resonantes. Para aquellos niveles J^π que tenían distintos resultados

experimentales, se tomó un promedio ponderado en función del factor de espectroscopía³ [3]. En el código GAMOW, los parámetros que se utilizaron para reproducir el nivel fundamental $1f_{7/2}$ y los estados de valencia $2p_{3/2}$ y $2p_{1/2}$ son

	V_0	$r_0[\text{fm}]$	$a[\text{fm}]$
Woods-Saxon	52,583 MeV	1,27	0,67
Espín-Órbita	11,496 MeV · fm	1,27	0,67

Tabla 3.5.1: Parámetros de los potenciales ajustados al núcleo ^{41}Ca .

mientras que los establecidos por la Tabla 3.3.1 son: $V_0 = 51\text{MeV}$, $a = 0,67\text{fm}$ y $r_0 = 1,27\text{fm}$. Entonces, el potencial de Woods-Saxon queda

$$v_{WS}(\mathbf{r}) = \frac{-52,583\text{MeV}}{1 + e^{\frac{r-4,379\text{fm}}{0,67\text{fm}}}} \quad (3.40)$$

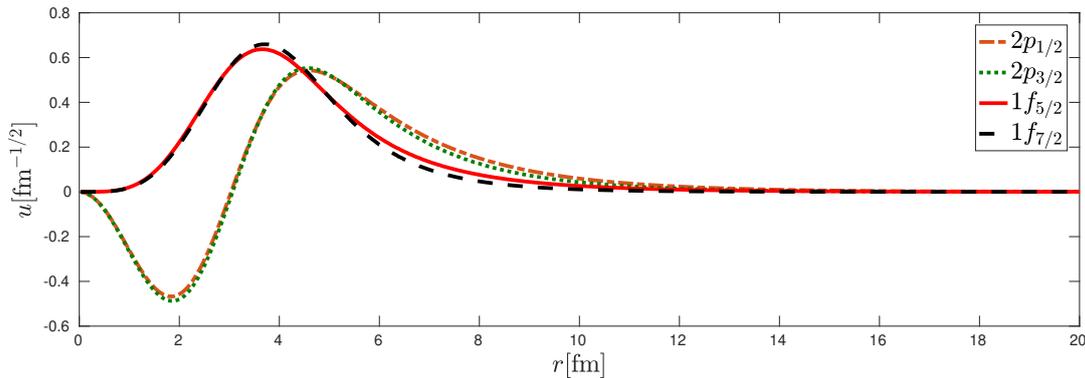


Figura 3.9: Funciones de onda obtenidas para los estados ligados del ^{41}Ca .

Vemos en la Tabla 3.5.2 que en base a los parámetros se logró ajustar los datos experimentales de los niveles $1f_{7/2}$ y $2p_{1/2}$ con una discrepancia en la cuarta cifra significativa, mientras que para el nivel $2p_{3/2}$ la discrepancia se encuentra en la tercer cifra significativa. Por otro lado, no se pudo ajustar el nivel $1f_{5/2}$. Este último nivel es el menos ligado, por lo que es lógico que nuestro modelo, que recordemos que simula a la interacción nuclear solo mediante el potencial de Woods-Saxon y el acople espín-órbita, no se logre ajustarlo. En la Figura 3.9 se presentan las funciones de onda de los cuatro estados ligados del sistema. En ella vemos que la mayor probabilidad de ocupación se encuentra dentro del núcleo, pues el radio nuclear de este

³Conocer los valores de los factores de espectroscopía permite conocer la estructura del campo medio nuclear y la importancia de la correlaciones entre niveles.

es $R = 1,27A^{1/3}\text{fm} = 4,38\text{fm}$, siendo que los estados f están localizados en $r_f \approx 3,5\text{fm}$ y los estados p presentan dos máximos, uno en $r_{p1} \approx 2\text{fm}$ y el otro en $r_{p2} \approx 4\text{fm}$.

Nivel	ε [MeV]	ε_{exp} [MeV]
$1f_{7/2}$	-8,3632	-8,3628
$2p_{3/2}$	-5,6655	-5,6888
$1f_{5/2}$	-3,2816	-1,3968
$2p_{1/2}$	-4,1612	-4,1608

Tabla 3.5.2: Comparación de la energía de ligadura para los niveles de energía correspondientes al núcleo ^{41}Ca respecto al carozo ^{40}Ca . Fuente datos experimentales: National Nuclear Data Center [36].

Por otro lado, utilizando los parámetros de la Tabla 3.5.1 en el código ANTI, se obtuvieron las siguientes energías de resonancia $\varepsilon_{Res} = \varepsilon_r - i\frac{\Gamma}{2}$, donde ε_r es la energía del estado y Γ inversamente proporcional al tiempo de vida media

Nivel	ε_r [MeV]	$\Gamma/2$ [MeV]
$1g_{9/2}$	2,5397	0,0155
$1g_{7/2}$	8,0807	0,9509
$2d_{5/2}$	1,6284	0,5906
$2d_{3/2}$	2,4301	1,7238
$1h_{11/2}$	12,5393	1,3928
$1h_{9/2}$	19,2052	5,6691
$1i_{13/2}$	23,0661	4,8067

Tabla 3.5.3: Parte real y parte imaginaria de la energía calculada para los estados resonantes del núcleo ^{41}Ca respecto al carozo ^{40}Ca .

Estas últimas energías serán útiles en el Capítulo 5 para identificar los estados que hacen que la densidad aumente significativamente. En la Figura 3.10 se grafican las funciones de onda correspondientes a cuatro estados resonantes. La resonancia correspondiente a los estados $1g_{7/2}$ y $1g_{9/2}$ pueden considerarse como localizada en una distancia cercana al núcleo. En esta zona, la parte imaginaria es considerablemente menor que la parte real y no se observa un comportamiento divergente. Podemos considerar entonces a estas resonancias como angostas y

por lo tanto físicamente relevante. En cambio, las resonancias correspondientes a los estados $2d_{5/2}$ y $2d_{3/2}$, presentan las características de resonancia ancha, es decir, la divergencia comienza a apreciarse en las cercanías del núcleo y la parte imaginaria no es pequeña.

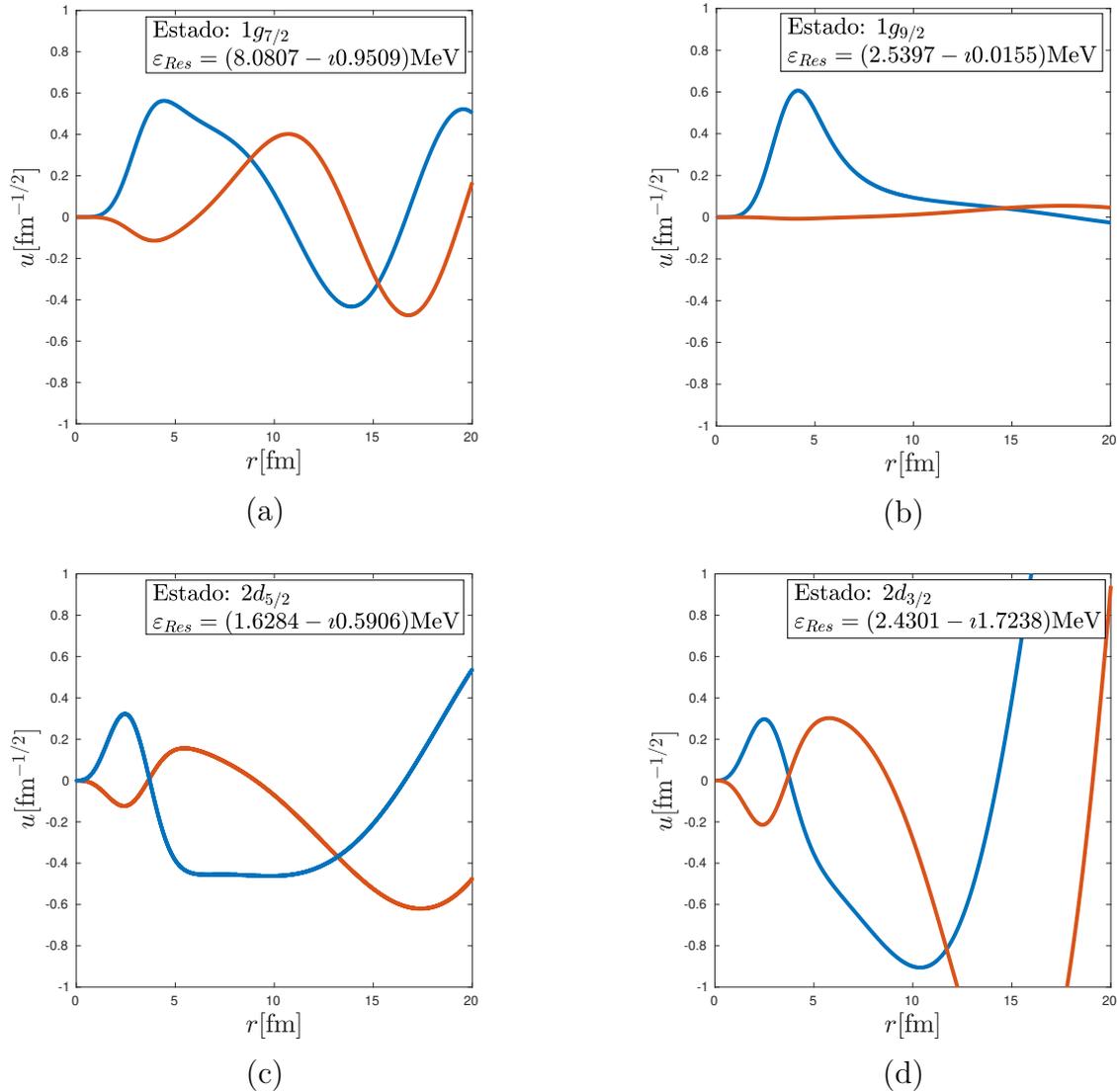


Figura 3.10: Parte real (celeste) y parte imaginaria (naranja) de las funciones de onda correspondiente a las resonancias de neutrones del ^{49}Ca .

3.6. Resultados para el ^{49}Ca

De la misma manera que en la sección anterior, se pensó al núcleo ^{49}Ca como un neutrón en el campo medio generado por el carozo ^{48}Ca , formado por 28 neutrones, 20 protones y $S_n = 9,951\text{MeV}$. En este caso, el nivel $1f_{7/2}$ es parte del carozo. Entonces, los parámetros de

los potenciales fenomenológicos en el código GAMOW que reproducen el estado fundamental $2p_{3/2}$ y los niveles de valencia $2p_{1/2}$ y $1f_{5/2}$ son

	V_0	$r_0[\text{fm}]$	$a[\text{fm}]$
Woods-Saxon	47,312 MeV	1,253	0,677
Espín-Órbita	17,175 MeV · fm	1,253	0,677

Tabla 3.6.1: Parámetros de los potenciales ajustados al núcleo ^{49}Ca

mientras que los establecidos por la Tabla 3.3.1 son: $V_0 = 45,5\text{MeV}$, $a = 0,67\text{fm}$ y $r_0 = 1,27\text{fm}$. Entonces, el potencial de Woods-Saxon queda en este caso

$$v_{WS}(\mathbf{r}) = \frac{-47,312\text{MeV}}{1 + e^{\frac{r-4,585\text{fm}}{0,677\text{fm}}}} \quad (3.41)$$

En base a estos parámetros, vemos en la Tabla 3.6.2 que se logró ajustar los datos experimentales de todos los niveles con una discrepancia en la cuarta cifra significativa, excepto en el $2p_{1/2}$ donde la discrepancia se encuentra en la segunda cifra.

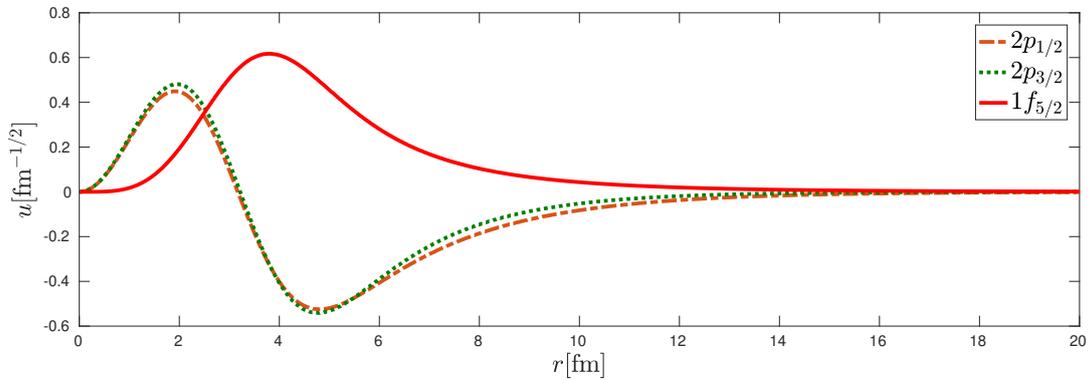


Figura 3.11: Funciones de onda obtenidas para los estados ligados del ^{49}Ca .

En la Figura 3.11 observamos las funciones de onda radial de los estados ligados. En este caso, el radio nuclear es $R = 1,253A^{1/3}\text{fm} = 4,6\text{fm}$ y tanto los estados p como el f tienen una probabilidad considerable de encontrarse cerca del límite nuclear. También se observa que la cantidad de nodos se corresponde con el valor de n^* correspondiente, pues las f con $n^* = 1$ tienen solamente el nodo del origen, mientras que las p con $n^* = 2$, presentan otro nodo a mitad del radio nuclear además del origen.

Nivel	ε [MeV]	ε_{exp} [MeV]
$2p_{3/2}$	-5,1459	-5,1465
$1f_{5/2}$	-1,5692	-1,5614
$2p_{1/2}$	-3,0896	-3,1232

Tabla 3.6.2: Comparación de la energía de ligadura para los niveles de energía correspondientes al núcleo ^{49}Ca . Fuente datos experimentales: National Nuclear Data Center [36].

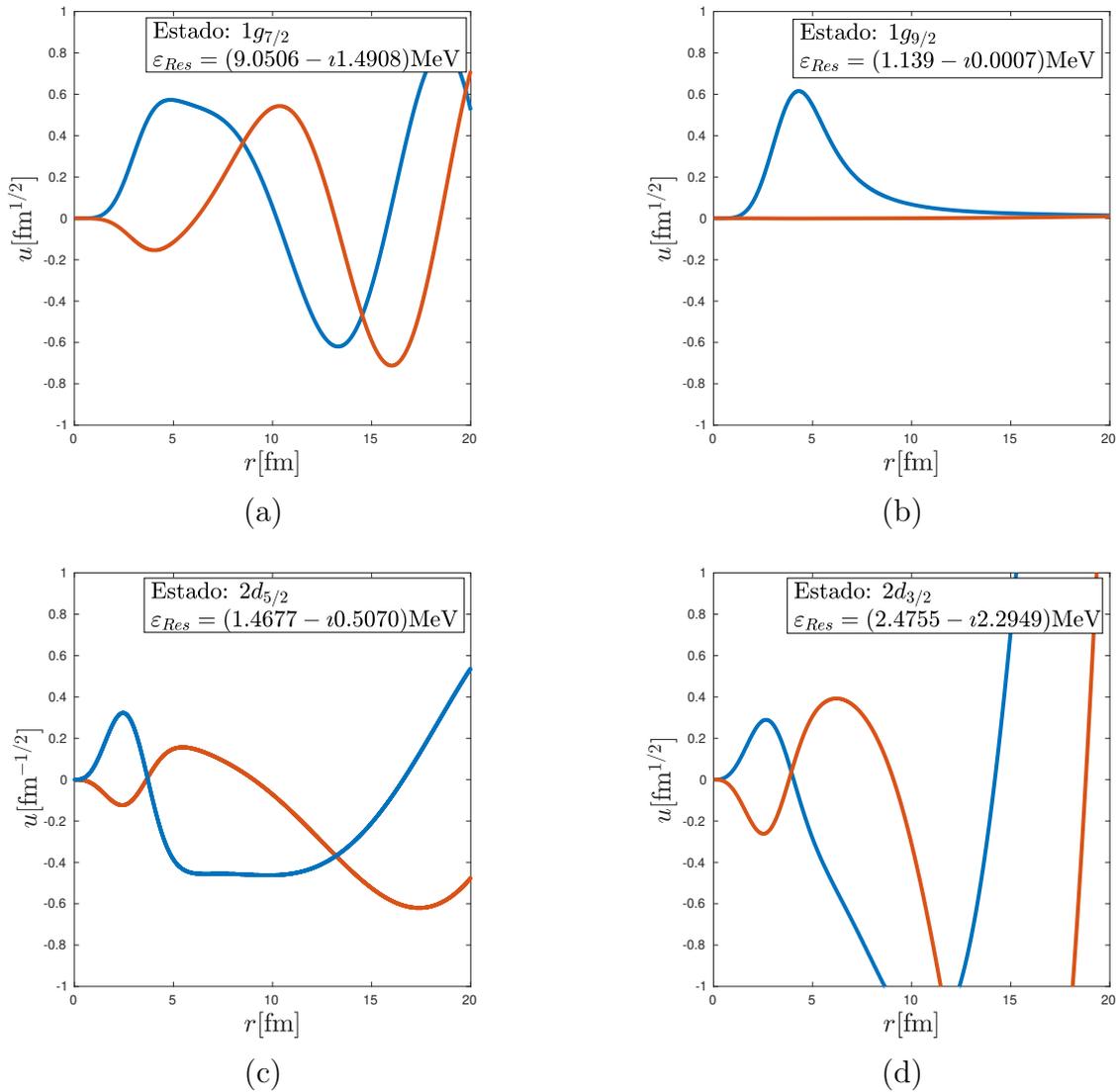


Figura 3.12: Parte real (celeste) y parte imaginaria (naranja) de las funciones de onda correspondiente a las resonancias de neutrones del ^{49}Ca .

Además, las energías de los estados resonantes que se obtuvieron mediante el código CWF son

Nivel	ε_r [MeV]	$\Gamma/2$ [MeV]
$1g_{9/2}$	1,1390	0,0007
$1g_{7/2}$	9,0506	1,4908
$2d_{5/2}$	1,4677	0,5070
$2d_{3/2}$	2,4755	2,2949
$1h_{11/2}$	10,2224	0,8015
$1h_{9/2}$	20,1670	7,0476
$1i_{13/2}$	19,7086	3,2404

Tabla 3.6.3: Parte real y parte imaginaria de la energía calculada para los estados resonantes del núcleo ^{49}Ca .

Los parámetros de la Tabla 3.6.1 serán utilizadas en el Capítulo 5 para el cálculo de la densidad de estados del continuo. En la Figura 3.12, el comportamiento de las resonancias es similar a las del núcleo ^{41}Ca , donde la principal diferencia se observa en el estado $1g_{7/2}$, el cual en este caso es una resonancia ancha sin significado físico en el sistema.

Capítulo 4

La línea de goteo

“-Harry ¿Cómo se sabe si un libro está terminado?”

-Los libros son como la vida Marcus, nunca se terminan del todo”

La verdad sobre el caso Harry Quebert, Joël Dicker

Intentar alcanzar los límites fue siempre una fuerza impulsora importante para las exploraciones en todos los campos de la ciencia. Además de la pura curiosidad por encontrar algo nuevo, a veces algo que nadie había observado antes, la observación (o no) de un nuevo tipo de materia o el descubrimiento de nuevas partículas genera información crucial para el entendimiento de las fuerzas interactuantes en el universo.

Recordemos que el número de protones (Z) en un núcleo determina el elemento. Así, la pregunta sobre elementos más pesados continúa siendo un campo de investigación interesante, hasta qué Z esperamos o podemos llegar. Así de excitante es también la pregunta sobre cuál es el mínimo o máximo de neutrones (N) que pueden formar el núcleo para un dado (Z). Estos límites son llamados *línea de goteo* (“dripline” en inglés) de protones y neutrones, respectivamente [37, 38].

En la Figura 4.1, se presenta la tabla de nucleidos en el cual uno puede observar 288 isótopos estables (esto es, tienen un tiempo de vida medio mayor a la vida estimada del sistema solar) y los aproximadamente 7000 núcleos predichos a existir entre las líneas de goteo. Un núcleo como el ^{160}Sn con 50 protones y 110 neutrones es teóricamente semi-estable, pero al presente, ni siquiera es posible estudiar experimentalmente al ^{132}Sn , un nucleido doblemente mágico.

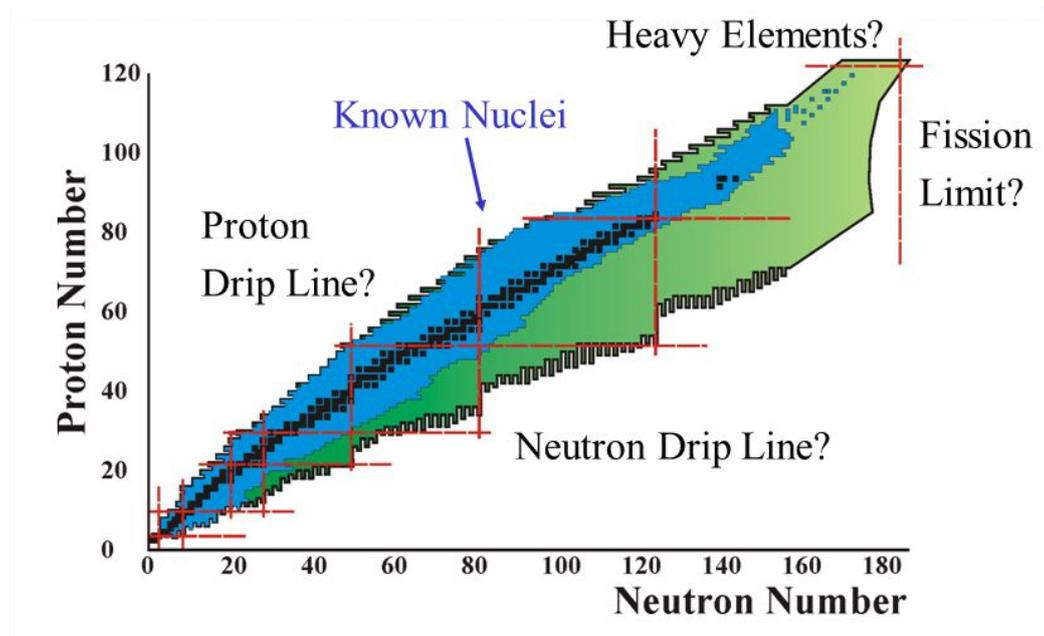


Figura 4.1: Mapa de núcleos atómicos existentes y las líneas de goteo predichas. Fuente: National Superconducting Cyclotron Laboratory - Michigan State University.

El descubrimiento de más nucleidos ricos en protones o neutrones ha sido la prioridad de la física nuclear en los últimos 40 años. Explorar las propiedades de todos estos núcleos es importante para entender la fuerza nuclear, la astrofísica nuclear y la formación de elementos. Progresos significativos se han realizado desde la mayor revisión de núcleos exóticos y línea de goteo [37, 39, 40].

4.1. Definición de la línea de goteo y de nucleido

No existe una definición clara de cómo establecer la línea de goteo de manera experimental. En su artículo científico de 1993, Mueller y Sherrill [37] definen la línea de goteo como "...el lugar donde el último nucleón ya no es más ligado para el isótopo más liviano (caso de protones) o más pesado (caso de neutrones) y el núcleo decae en la escala temporal de interacciones fuertes (10^{-22} s o más rápido)". Por su parte, la edición del 2002 de la tabla de nucleidos define a la línea de goteo como: "El valor de Z y N para los cuales el último nucleón ya no es ligado y el núcleo decae en el orden de 10^{-22} s o más rápido en la escala temporal define la línea de goteo"[41]. En su publicación científica de 2004, Jonson establece: "Las líneas de goteo son los límites del panorama nuclear, donde protones o neutrones adicionales ya no se quedarán en el núcleo - ellos literalmente gotean del núcleo"[38].

En contraste, los reportes teóricos tienen una definición establecida. Hansen y Tostevin establecieron [42]: “...(la línea de goteo es) donde la energía de separación de un nucleón tiende a cero”. Entonces, la línea de goteo de neutrones queda definida como el lugar donde S_n alcanza al cero. Pero también existen casos, como el de los núcleos borromeanos¹, donde el núcleo ${}^A_Z X_N$ con N impar es no ligado pero el núcleo ${}^{A+1}_Z X_{N+1}$ si lo es. Es por ello, que en el presente trabajo, definiremos una línea de goteo como $S_n = 0$ para los isótopos impares y otra cuando $S_{2n} = 0$ para los isótopos pares.

A la hora de definir la existencia de un nucleido como una entidad se presentan ambigüedades. A veces, núcleos no ligados con tiempo de vida muy corto no se definen como nucleidos en sí, sino simplemente como resonancias.

La definición de línea de goteo no limita la existencia de un nucleido. Especialmente en la línea de goteo de protones, la emisión de un protón desde un núcleo no ligado puede ser limitada significativamente por la presencia de la barrera de Coulomb. El protón no ligado tiene que “tunear” a través de la barrera, lo cual puede implicar tiempo de vida medio alto en comparación con las resonancias estándares. Estos tiempos de vida pueden incluso ser mayores que aquellos para el decaimiento β^+ . Además de la barrera de Coulomb, el momento angular puede proveer otra barrera significativa. En el caso de los neutrones, esta es la única barrera que dificulta la emisión de un neutrón del núcleo.

Una definición potencial para la existencia de un nucleido puede establecerse a través de la definición de radiactividad². Goldanskii estableció que “... 10^{-12} s corresponden a un límite aproximado para la radiactividad como tal” [45]. Esta afirmación fue apoyada luego por Cerny y Hardy [46]: “...tiempos de vida más largos que 10^{-12} s, un límite inferior posible para el proceso llamado radiactividad”.

Si utilizamos este límite temporal, la definición de nucleido sería más restrictiva que la de un elemento químico, es decir, un átomo, y esto es inapropiado. La Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC por sus siglas en inglés) publicó una guía para definir el descubrimiento de un elemento químico [47]. En conjunto con otros criterios, establecieron que “el descubrimiento de un elemento químico es la demostración experimental, sin duda razonable, de la existencia de un nucleido con número atómico Z no identificado anteriormente, existiendo

¹Sistema de tres cuerpos ligado que se encuentra no ligado de a pares porque ninguna de las interacciones de los subsistemas de dos cuerpos son lo suficientemente fuertes para ligarlos en pares [43].

²Entendemos a la radiactividad como el proceso de decaimiento espontáneo y transformación de núcleos inestables acompañado de la emisión de partículas nucleares y/o radiación gama [44].

como mínimo por 10^{-14} s”. Este límite no es arbitrario, y está definido en base al “tiempo estimado que le toma al núcleo captar electrones exteriores”.

Una definición similar para un nucleido debería estar relacionada con las escalas típicas de movimiento nuclear. Vibraciones y rotaciones nucleares tienen un tiempo del orden de 10^{-22} s, que puede ser considerado como un tiempo característico nuclear [45]. Es por esto que definimos a nucleido como aquel núcleo que a lo sumo posee un tiempo de vida medio mayor que 10^{-22} s.

4.2. Observación experimental de la línea de goteo

El hecho de que un nucleido puede incluso existir más allá de la línea de goteo, hace que la determinación experimental de ella sea mucho más complicada. La producción e identificación única de un núcleo específico en una reacción es una razón suficiente para establecer su existencia. En la Figura 4.2 presentamos los distintos núcleos ligados observados y en qué momento fueron descubiertos para $Z \leq 20$.

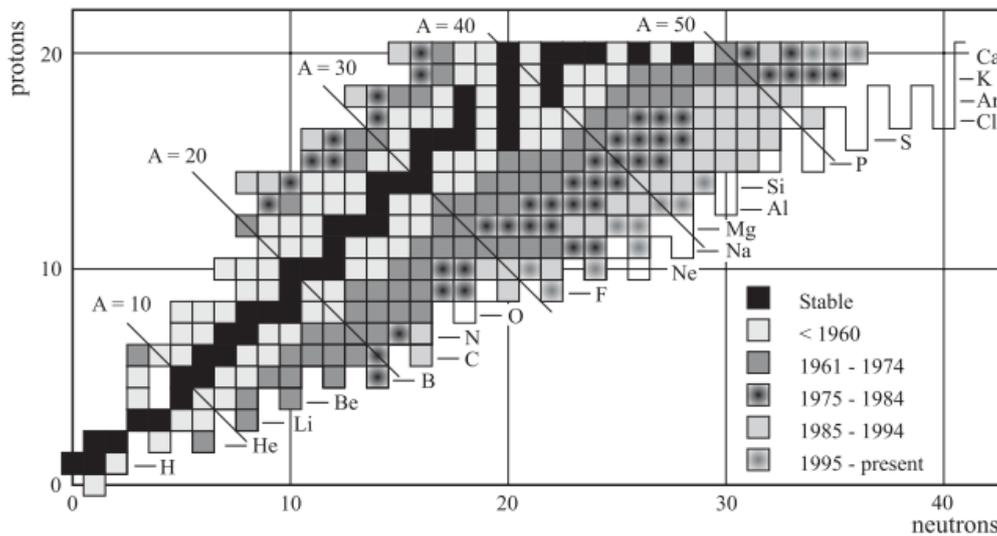


Figura 4.2: Núcleos ligados observados para $Z \leq 20$. Los diferentes rellenos indican la primera observación del nucleido. Fuente: Reaching the limits of nuclear stability - Thoennessen [48].

La distinción entre la existencia de un nucleido y la línea de goteo no es generalmente un problema para el caso de los neutrones. El tiempo de vida corto del decaimiento β es del orden de los milisegundos, que se encuentra en el rango de los nucleidos observables directamente. En general, el tiempo de vida para la emisión de neutrones es más corto que los picosegundos. La observación directa de la emisión de un neutrón con un tiempo de vida mayor a los picosegundos podría calificar como una radiactividad de neutrón y como un proceso

extremadamente improbable pues la ventana en la energía de separación es extremadamente pequeña. Entonces, no quedaría ambigüedades a la hora de definir como línea de goteo de neutrones como el último núcleo ligado, excepto por el caso anteriormente discutido, que genera el efecto “serrucho” en la zona de la línea de goteo, como vemos en las Figuras 4.1 y 4.2. La dificultad radica en decidir si la evidencia experimental es suficiente como para establecer la observación del nucleido o fijar un límite superior de detección. Por ejemplo, en la década de 1960 existieron controversias en cuanto a la existencia de un dado nucleido. El ${}^5\text{He}$ fue primeramente observado como un núcleo ligado [49], pero su existencia no pudo ser probada en experimentos posteriores [50]. En contraste, ${}^{14}\text{Be}$ [51] y ${}^{31}\text{Ne}$ [52] fueron primeramente observados como no ligados por su bajo tiempo de vida, pero posteriormente descubiertos como ligados [53, 54].

4.3. Línea de goteo de neutrones

El primer núcleo exótico³ observado en la zona de nucleidos ricos en neutrones fue el ${}^{16}\text{C}$ [55] mediante una reacción (d, p) ⁴ en el núcleo radiactivo ${}^{14}\text{C}$. En cuanto al elemento que corresponde a este trabajo, el Calcio, un estudio reciente [56] informa el descubrimiento del núcleo ligado ${}^{60}\text{Ca}$ rico en neutrones, siendo este el límite experimental actual, mientras que se espera que con las nuevas facilidades se pueda progresar más.

La Figura 4.3 muestra la tabla de nucleidos para núcleos ligados y ricos en neutrones hasta $Z = 20$. Los núcleos estables están en negro, los ligados en gris oscuro y los no ligados en gris claro. La línea de goteo determinada experimentalmente es la línea negra fina. La línea a rayas muestra la ubicación más probable de la línea de goteo, pero estrictamente hablando, no fue confirmada experimentalmente. Los cuadrados rayados son núcleos que pueden ser tanto ligados como no ligados en base a extrapolaciones de la tabla de masas atómicas AME2003 [57]. La línea gris muestra la línea de goteo predicha por el modelo de masas de Tachibana⁵, *et al* [58]. En cuanto al Calcio, modelos estadísticos recientes permiten predecir que el isótopo ${}^{68}\text{Ca}$ tiene una probabilidad del 76 % de ser ligado [59].

En el estudio concienzudo de las topologías específicas de la línea de goteo de neutrones, un

³Un núcleo exótico es definido como aquel que posee un protón o un neutrón de forma que se ubica más allá que el valle de estabilidad en la tabla de nucleidos.

⁴Este tipo de reacciones se denominan de “rearreglo”, pues cambian el número de protones o neutrones del objetivo. En este caso, pasamos del ${}^{14}\text{C}$ al ${}^{16}\text{C}$.

⁵El modelo presenta una fórmula empírica de masas, al estilo de Bethe-Weizsäcker, pero considerando la relación entre las magnitudes nucleares y el efecto cooperativo de deformación.

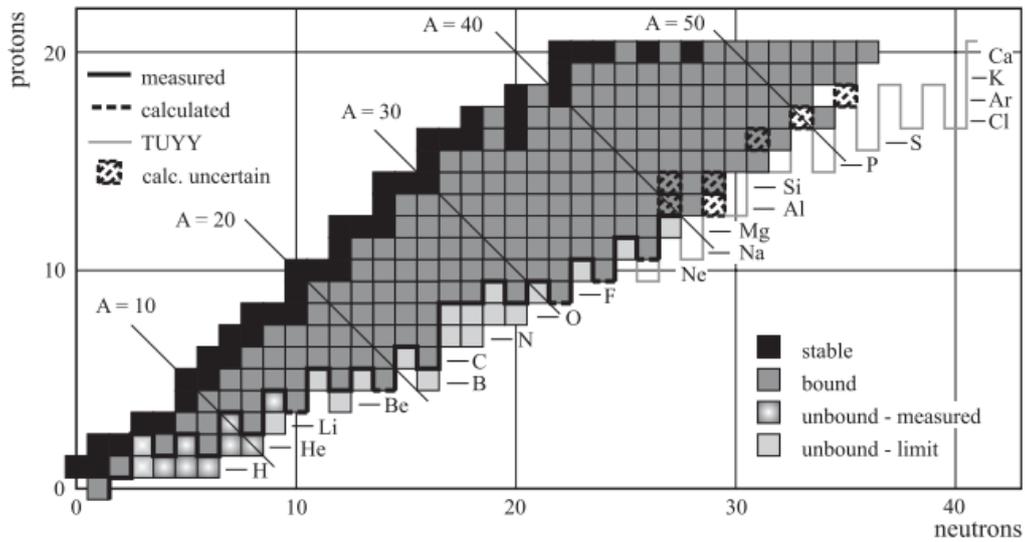


Figura 4.3: Núcleos en la línea de goteo de neutrones y más allá para $Z \leq 20$. Fuente: Reaching the limits of nuclear stability - Thoennessen [48].

número de problemas interesantes de física entran en juego. Uno de ellos es que los núcleos en la línea de goteo funcionan como “laboratorio” para testear las propiedades de apareamiento en un entorno rico en neutrones. Esto puede verse fácilmente a partir de la relación aproximada que conecta el nivel de Fermi λ_F , el “gap” Δ y la energía de separación de un neutrón [60, 61]:

$$S_n \approx -\lambda_F - \Delta \quad (4.1)$$

Esta expresión nos dice que conociendo el Δ y el λ_F de un núcleo ${}^A_Z X_N$ con N par, es posible definir la energía de separación de un nucleón del núcleo ${}^{A+1}_Z X_{N+1}$. Una justificación cualitativa de dicha expresión puede entenderse como sigue: usando la expresión de S_n en función de la energía de ligadura (ecuación (3.6)), concluimos que la energía de separación, en ausencia de correlaciones de apareamiento, debería ser igual al valor absoluto del nivel de Fermi, es decir, de la energía a la cual se encontraba la partícula que es removida del núcleo. Correlaciones de pares incrementarían este número por una cantidad que es aproximadamente Δ para núcleos par-par y lo reducirían una cantidad Δ para núcleos con A impar. En la línea de goteo, la energía de separación tiende a cero, y como consecuencia, el valor absoluto de la energía de Fermi (que caracteriza las propiedades de campo medio) y el “gap” (que caracteriza las propiedades de apareamiento) tienden a igualarse. Entonces, el apareamiento no puede seguir siendo considerado como una perturbación nucleónica al campo medio y toma la importancia de las energías de partícula simple.

Como la línea de goteo no es accesible mucho más allá que $N \sim 28$, en el futuro cercano las predicciones de la línea de goteo de neutrones para nucleidos pesados mediante diferentes modelos no podrá ser testada, por lo que es importante la inversión en nuevas facilidades que se están construyendo en la actualidad. El valle de estabilidad en la zona de núcleos ricos en neutrones es mayor que en el caso de ricos en protones. Entonces, asumiendo la misma incerteza en los diferentes modelos teóricos, la incertidumbre en la ubicación de la línea de goteo cubre un largo rango de neutrones, como se aprecia en el reporte de Wang del 2015 [62].

Capítulo 5

El continuo

*“El mundo es continuo,
pero la mente es discreta.”*

David Mumford

En el año 1901, el físico neerlandés Heike Kamerlingh Onnes (aquel mismo que en 1913 recibiese un Premio Nobel de Física por el descubrimiento de la superconductividad) introduce la *expansión del virial* como una generalización de la ley de gases ideales [63]. Al ser una teoría independiente del modelo, numerosos fueron los casos donde se calcularon los coeficientes que hacen a la expansión del virial. Principalmente, el segundo y el tercer coeficiente fueron los más estudiados, ya que son importantes a bajas densidades.

Uno de estos casos fue el desarrollado por George Uhlenbeck y Erich Beth en dos artículos científicos [64, 65] durante el año 1937. Ellos particularmente analizaron el comportamiento del segundo coeficiente del virial a bajas temperaturas para sistemas bosónicos y fermiónicos. Establecieron una relación intrínseca con la *densidad de estados*, obtenida a partir del desfase propio de la teoría de dispersión.

Por otro lado, en 1968 Berggren [66] introduce una representación formal que incorpora estados con energía compleja. Esta contiene tanto estados ligados, como también estados del continuo resonantes y no resonantes. Utilizando esta herramienta, Liotta, *et al* [67] logran extender el modelo de capas al plano de energía complejo, lo cual nos permite obtener descripciones más acertadas de los sistemas nucleares donde las correlaciones con el espectro

continuo de energía son importantes.

Ya hacia la actualidad, Rodolfo Id Betan en una publicación científica de 2012 [68] utiliza la densidad de estados propuesta por Uhlenbeck y Beth para modelizar aquellos estados del continuo en un núcleo propuestos por Liotta, *et al*, para aplicarlo luego en la resolución del Hamiltoniano de apareamiento dado por Richardson [4, 5, 6].

En esta sección se establecerá la teoría presentada en dichos artículos científicos, desarrollando la noción de densidad de estados y su relación con el desfase para un sistema nuclear, con vistas a su utilización en núcleos reales.

5.1. Descripción

En su publicación científica Ref. [67], Liotta, Maglione, Sandulescu y Vertse demostraron de manera práctica y numérica que el conjunto de estados ligados y resonancias de Gamow¹, sumado a un conjunto numerable de estados de dispersión perteneciendo a un contorno de dichas resonancias, conforman una representación de Berggren.

Berggren obtiene un conjunto de estados completo y ortonormal que contiene estados resonantes, estados ligados y estados de dispersión. Esto permite expandir autofunciones en el espacio complejo en base a estos estados bajo ciertas condiciones. El conjunto de estados ligados, resonancias de Gamow y estados de dispersión pertenecientes a un contorno L^+ dentro del plano imaginario es llamado representación de Berggren. Puede verse entonces como una extensión de la base de autofunciones del espacio real al espacio complejo que permite considerar estados resonantes. Esta analogía da una idea más clara de la interpretación física de los estados resonantes, ya que indica que estos estados se comportarán de manera similar a estados ligados, pero con una vida media relacionada con la parte imaginaria de la energía.

En particular, cuando el contorno L^+ se coloca sobre el eje real, se recupera la representación usual de la mecánica cuántica, formada por estados ligados con energía real negativa y estados de dispersión con energía real positiva. Esta conclusión, nos permite a nosotros hacer uso de los estados resonantes para representar al continuo, utilizando la densidad de estados presentada por Uhlenbeck y Beth. Para ello, presentaremos el desfase de la teoría de dispersión en la siguiente sección.

¹Entendemos por resonancias de Gamow a aquellas soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo que son regulares en el origen y tienen condiciones de borde salientes a largas distancias

5.2. Dispersión y desfase

Cuando estudiamos interacciones gobernadas por un potencial central $V(r)$, las soluciones de la ecuación de Schrödinger pueden ser escritas como una combinación lineal de productos de partes radiales y partes angulares, es decir, una combinación lineal de ondas parciales [69]:

$$\Psi = \sum_{l,m} a_{lm} \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.1)$$

donde $u_l(r)$ son soluciones de la ecuación radial de Schrödinger con condición $u_l(0) = 0$.

Si suponemos que nuestro problema presenta simetría axial, podemos eliminar la dependencia en el ángulo ϕ de forma que

$$\Psi = \sum_l a_l P_l(\cos\theta) \frac{u_l(r)}{kr} \quad (5.2)$$

Los términos de esta ecuación pueden ser entendidos como las funciones de onda parciales con la cual la solución general Ψ es construida. Así mismo, es útil expandir la expresión de onda plana en los polinomios de Legendre

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (5.3)$$

donde $j_l(kr)$ son las funciones esféricas de Bessel y $P_l(\cos\theta)$ los polinomios de Legendre. La expresión (5.3) tiene la forma de la ecuación (5.2), por lo que podemos decir que las ondas planas pueden ser entendidas como un conjunto de ondas parciales, cada una con momento angular $\sqrt{(l+1)\hbar}$. La contribución de cada onda parcial viene dada por la amplitud $2l+1$ y el factor de fase i^l . Físicamente, entendemos que $2l+1$ es la probabilidad relativa de que una partícula en un haz incidente uniforme tenga momento angular $l\hbar$.

A largas distancias del origen, las funciones esféricas de Bessel se reducen a

$$j_l(kr) \sim \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2})}{kr} = \frac{e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2})}}{2ikr} \quad (5.4)$$

Si reemplazamos en la ecuación (5.2), junto con (5.3), obtenemos el comportamiento de la

función de onda asintóticamente

$$e^{ikr\cos\theta} \sim \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \left[\frac{e^{i(kr-l\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-l\frac{\pi}{2})}}{kr} \right] \quad (5.5)$$

Cuando la dispersión es causada por un potencial $V(r)$, la forma asintótica de Ψ puede ser obtenida si observamos que la presencia del potencial tiene el efecto de causar una perturbación en la parte saliente de la onda plana, que puede ser representada por una función de módulo unitario, $S_l(k)$. Entonces

$$\Psi \sim \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \left[\frac{S_l(k) e^{i(kr-l\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-l\frac{\pi}{2})}}{kr} \right] \quad (5.6)$$

donde la función $S_l(k) = e^{2i\delta_l}$.

Comparando (5.2) con (5.6), obtenemos una expresión para a_l y para la forma asintótica de $u_l(r)$:

$$a_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l} \quad (5.7)$$

$$u_l(r) \sim \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l) \quad (5.8)$$

Entonces, la única diferencia en el comportamiento de la función de onda lejos del origen en ambos casos es un *desfase* δ_l . Las constantes $S_l(k)$ son las componentes de la matriz de dispersión S , donde en este caso, la matriz es diagonal. Estos elementos miden la respuesta del potencial determinando el desfase de la onda saliente resultante con respecto a aquella que habría salido si no hubiese potencial. El hecho de que S_l sea de módulo uno, expresa la ausencia de emisión o absorción de partículas durante el proceso de dispersión, esto es, conservación de flujo.

El comportamiento asintótico de la función $u(r)$ presentado en la ecuación (5.8) junto con la condición de que para una dada onda parcial el desfase tienda a cero cuando el número de onda tienda al infinito, determina $\delta_l(k)$ como una función continua que se anula cuando k tiende a infinito.

De manera más general [70], sabemos que $u_l(r)$ es proporcional a k^{l+1} cuando $k \rightarrow 0$. Esto

implica que el comportamiento de la función $S_l(k)$ a baja energía será

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l} \sim 1 - ic_l k^{2l+1} \quad (5.9)$$

donde c_l es una constante real. Esto implica, primeramente que los elementos de la diagonal de la matriz S tienden a uno linealmente en k . Además, implica que a una dada energía baja, unas pocas amplitudes a_l difieran de cero. Es por ello que el análisis a ondas parciales es útil a bajas energías, donde los términos de la ecuación (5.2) son unos pocos.

La razón física del dominio de ondas con bajo momento angular a bajas energías está relacionado con que mientras más grande sea el momento angular, mas importante es la barrera efectiva generada por el término centrífugo de la ecuación de Schrödinger, y entonces es más difícil para la partícula penetrar en la región central, donde la mayor parte de energía potencial está concentrada. Por esto, se necesita mayor energía cinética para “sentir” el potencial a momentos angulares altos. A medida que aumenta el momento angular orbital, el campo medio de partícula simple se vuelve menos importante, por lo que se utiliza una cota l_{max} en el momento angular orbital.

5.3. Densidad de estados del continuo

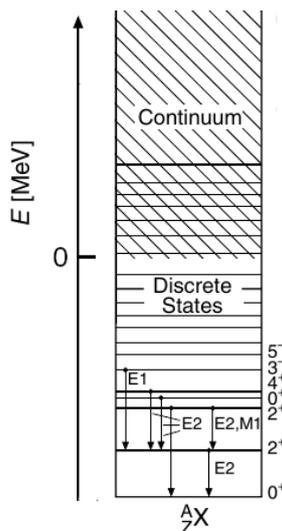


Figura 5.1: Esquema típico de los niveles de un núcleo atómico, en este ejemplo un núcleo par-par. Fuente: Particles and Nuclei - Povh, *et al* [24].

Uno puede discretizar los estados de dispersión del continuo con energía $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ situando el sistema en una gran caja esférica de radio R . Entonces, la condición de borde de la caja, $u_{lj}(k, R) = 0$ fuerza al espectro continuo a tener valores discretos $\varepsilon_{nlj} = \frac{\hbar^2 k_{nlj}^2}{2\mu}$, donde ahora introducimos el número cuántico j pues tenemos en cuenta el espín del sistema. El parámetro n denota el número de nodos de la función $u_{nlj}(r) = u_{lj}(k_{nlj}, r)$ en el intervalo $[0, R)$. La relación entre el número de nodos y el desfase puede ser obtenido a través de la relación asintótica (5.8) y la condición de borde, dando entonces

$$k_{nlj}R - l\frac{\pi}{2} + \delta_{lj}(k_{nlj}) = n_{lj}\pi \quad (5.10)$$

Si para un par $\{l, j\}$ fijo se ordenan los estados ε_{nlj} en función del número de nodos de u_{nlj} , entonces n_{lj} se refiere al número de niveles (sin contar la degeneración) entre el más bajo del potencial de partícula simple y el de energía ε_{nlj} [65].

Supongamos ahora que dada una magnitud cualquiera $f_{lj}(k_{nlj})$ queremos calcular $\sum_n f_{lj}(k_{nlj})$. Como en el límite de $R \rightarrow \infty$ el espectro ε_{nlj} se vuelve continuo, ocurre que [71]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_n f_{lj}(k_{nlj}) = \int dk \left(\frac{dn_{lj}}{dk} \right) f_{lj}(k) \quad (5.11)$$

donde entendemos a $g_{lj}(k) = \frac{dn_{lj}}{dk}$ como la cantidad de estados dn_{lj} que se encuentran en un diferencial dk . Usando la ecuación (5.10) que relaciona la cantidad de estados n_{lj} con el desfase δ_{lj} , obtenemos

$$\frac{dn_{lj}}{dk} = \frac{1}{\pi} \left[R + \frac{d\delta_{lj}}{dk} \right] \quad (5.12)$$

La sumatoria en (5.11) incluye estados ligados (energía negativa) y estados discretizados del continuo (energía positiva). Podemos reescribir la ecuación (5.11) en función de la energía ε de forma que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_n f_{lj}(k_{nlj}) = \int_0^\infty g_{lj}^{(\text{total})}(\varepsilon) f_{lj}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5.13)$$

donde introdujimos la densidad de energía total de ondas parciales

$$g_{lj}^{(\text{total})}(\varepsilon) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{\mu}{2\pi^2 \hbar^2 \varepsilon}} R + \frac{1}{\pi} \frac{d\delta_{lj}}{d\varepsilon} \right] \quad (5.14)$$

El primer término, que diverge cuando hacemos la caja infinita, corresponde a la densidad de nucleones libres. Demostraremos esto haciendo un análisis análogo para cuando el campo medio nuclear es cero. En este caso tendremos en el límite de la caja infinita

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{n, \varepsilon_{nlj}^{(0)}} f_{lj}(k_{nlj}^0) = \int_0^\infty g_{lj}^{(\text{libre})}(\varepsilon) f_{lj}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5.15)$$

donde $\varepsilon_{nlj}^{(0)} = \frac{\hbar^2 [k_{nlj}^{(0)}]^2}{2\mu}$ son los autovalores positivos discretos y la densidad de estados libres queda

$$g_{lj}^{(\text{libre})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{\mu}{2\pi^2 \hbar^2 \varepsilon}} R \right] \quad (5.16)$$

Usando el hecho de que $g_{lj}^{(\text{libre})}$ y $g_{lj}^{(\text{total})}$ tienen la misma divergencia en función del radio de la

caja, podemos definir el cambio en la densidad de estados de partícula simple por la interacción con el campo medio nuclear como

$$g_{lj}(\varepsilon) \equiv g_{lj}^{(\text{total})} - g_{lj}^{(\text{libre})} = \frac{1}{\pi} \frac{d\delta_{lj}}{d\varepsilon} \quad (5.17)$$

El desfase a energía cero es determinado por el teorema de Levinson como $\delta_{lj}(0) = n_{lj}\pi$. La densidad parcial $g_{lj}(\varepsilon)$ puede ser positiva o negativa dependiendo del signo de la derivada del desfase. La densidad de niveles continuos de partícula simple resulta de la suma de cada onda parcial $g_{lj}(\varepsilon)$ y queda

$$g(\varepsilon) = \sum_{lj} (2j + 1) g_{lj}(\varepsilon) \quad (5.18)$$

que es la densidad de estados mencionada en las publicaciones Ref. [64, 65] de Beth y Uhlenbeck.

5.4. El código

El código fue desarrollado en el lenguaje Fortran 77, y el objetivo principal de este es obtener la densidad de estados del continuo correspondiente a un núcleo a partir de la derivada del desfase δ . Para ello, el programa recibe como información de entrada los parámetros del potencial de Woods-Saxon y el acople espín-órbita, la cota máxima de momento angular orbital l_{max} y una partición del espectro del continuo, que veremos más adelante. En base a estos datos, el código calcula el desfase que sufre un neutrón al interactuar con el núcleo, calculando entonces las densidades parciales g_{lj} a través de la ecuación (5.17).

Finalmente, se calcula la densidad de estados total del continuo $g(\varepsilon)$ como se presenta en la ecuación (5.18).

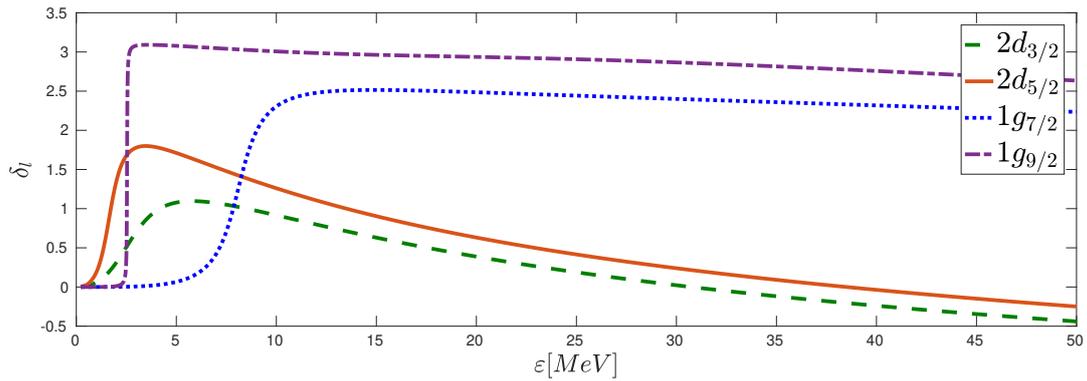
5.5. Resultados para el ^{41}Ca

A la hora de modelizar los estados del continuo correspondientes al núcleo ^{41}Ca , tomamos en cuenta todos aquellos que pertenezcan a él desde $l = 0$ hasta un determinado l_{max} . Para ello, tomamos los estados resonantes, los cuales pertenecen al continuo, calculados en la sección 3.5, y los reescribimos en la Tabla 5.5.1.

Nivel	ε_r [MeV]	$\Gamma/2$ [MeV]
$1g_{9/2}$	2,5397	0,0155
$1g_{7/2}$	8,0807	0,9509
$2d_{5/2}$	1,6284	0,5906
$2d_{3/2}$	2,4301	1,7238
$1h_{11/2}$	12,5393	1,3928
$1h_{9/2}$	19,2052	5,6691
$1i_{13/2}$	23,0661	4,8067

Tabla 5.5.1: Energías de los estados resonantes del ^{41}Ca .

En la Figura 5.2 observamos el desfase definido en la sección 5.2 de las funciones de onda parciales graficadas en la Figura 3.10.

Figura 5.2: Desfase δ_l para diferentes valores de l , correspondientes a las funciones de onda resonantes mostradas en la Figura 3.10.

Para establecer una densidad de estados del continuo para estos estados resonantes, se tomó una partición del espectro de energías positivas como se observa en la Tabla 5.5.2. En dicha Tabla, los vértices se toman en función de las resonancias de la Tabla 5.5.1, quedando los 5 vértices definidos como: $\varepsilon_r - 2 \cdot \frac{\Gamma}{2}$, $\varepsilon_r - 1 \cdot \frac{\Gamma}{2}$, ε_r , $\varepsilon_r + 1 \cdot \frac{\Gamma}{2}$ y $\varepsilon_r + 2 \cdot \frac{\Gamma}{2}$. Además, los puntos internos corresponden con la cantidad de secciones que quedarán delimitadas entre dos vértices contiguos.

Haciendo uso entonces del código descrito en la sección anterior, se obtuvo la densidad de estados del continuo correspondiente al núcleo ^{41}Ca con diferentes cotas de l_{max} , como vemos en la Figura 5.3. En ella, además se aprecia la convergencia $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$. También apreciamos los picos que corresponden a cada una de las resonancias dadas en la Tabla 3.5.3,

viendo una correspondencia entre el ancho de pico y Γ . Además, en la Figura 5.4 se observa la densidad de estados de las ondas parciales no resonantes, donde se aprecia que por su intensidad no influyen en la densidad de estados total de la Figura 5.3.

Contorno para la resonancia $1g_{9/2}$		Contorno para la resonancia $1g_{7/2}$	
Vértice	Puntos Internos	Vértice	Puntos Internos
2.5087	10	6.1788	20
2.5242	10	7.1297	20
2.5397	10	8.0807	20
2.5553	10	9.0316	20
2.5707		9.9826	
Contorno para la resonancia $2d_{5/2}$		Contorno para la resonancia $1h_{11/2}$	
Vértice	Puntos Internos	Vértice	Puntos Internos
0.4472	10	9.7317	20
1.0378	10	11.1281	20
1.6284	10	12.5245	20
2.2190	10	13.9209	20
2.8096		15.3173	
Contorno para la resonancia $1h_{9/2}$		Contorno para la resonancia $1i_{13/2}$	
Vértice	Puntos Internos	Vértice	Puntos Internos
7.825	100	13.4067	100
13.4957	100	18.2223	100
19.1664	100	23.0379	100
24.8371	100	27.8535	100
30.5078		32.6691	

Tabla 5.5.2: Partición en el espectro del continuo del núcleo ^{41}Ca .

Esta densidad de estados total será utilizada para modelizar los estados del continuo para el Hamiltoniano de apareamiento a desarrollar en el Capítulo 7. Para ello, se utiliza la cota $l_{max} = 15$ pues es la que abarca mayor cantidad de estados resonantes con significado físico, y una energía máxima de 100MeV pues evitamos uso de tiempo de cálculo excesivo, siendo que son pocos los neutrones que esperamos pueblen el continuo.

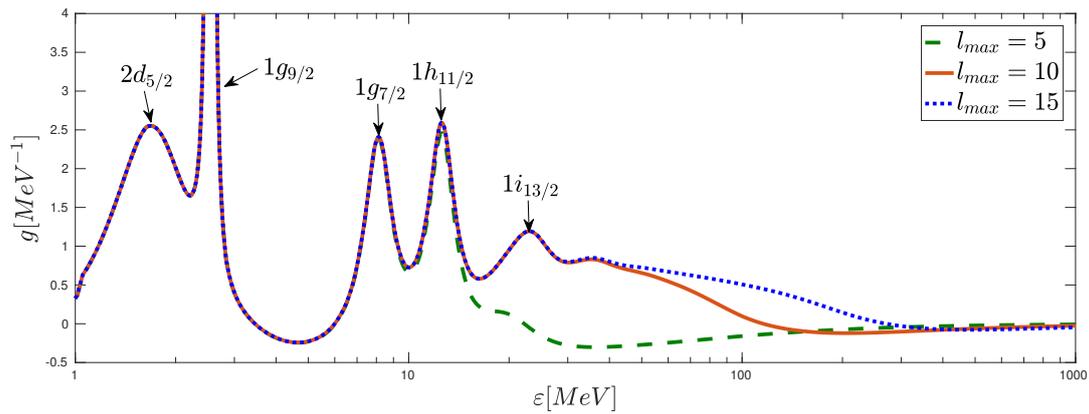


Figura 5.3: Densidad de estados del ^{41}Ca para diferentes cotas de momento angular l hasta una energía de 1000MeV.

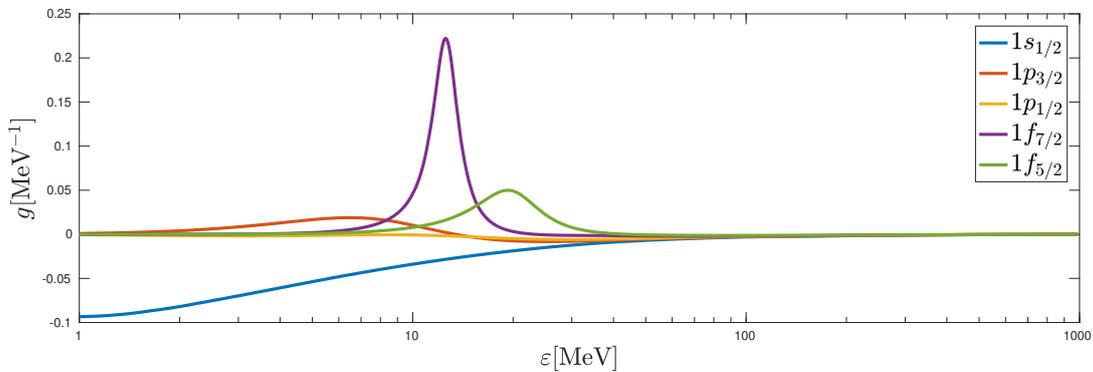


Figura 5.4: Densidad de estados de las ondas parciales no resonantes con $l = 1$ y $l = 3$ para el núcleo ^{41}Ca .

5.6. Resultados para el ^{49}Ca

Del mismo modo, para el ^{49}Ca se utilizaron los estados resonantes calculados en la sección 3.6 (ver Tabla 5.6.1), y vemos también en la Figura el desfase de estos. En este caso, se utilizó la partición del continuo de la Tabla 5.6.2, desarrollada de la misma manera que la sección anterior.

Haciendo uso de esa partición del espectro de energías positivas, se obtuvo una densidad de estados correspondiente al ^{49}Ca que se muestra en la Figura 5.6. Nuevamente, observamos la convergencia de $g(\varepsilon)$ y la relación del ancho de pico con el término imaginario de las energías de resonancia. A comparación con la densidad de estados del núcleo de la sección anterior, vemos que el pico correspondiente a $1g_{9/2}$ se encuentra en este caso más cercano al cero de energía, mientras que el pico $1h_{11/2}$ es mucho más grande y absorbió al que corresponde a la resonancia $1g_{7/2}$.

Nivel	ε_r [MeV]	$\Gamma/2$ [MeV]
$1g_{9/2}$	1,1390	0,0007
$1g_{7/2}$	9,0506	1,4908
$2d_{5/2}$	1,4677	0,5070
$2d_{3/2}$	2,4755	2,2949
$1h_{11/2}$	10,2224	0,8015
$1h_{9/2}$	20,1670	7,0476
$1i_{13/2}$	19,7086	3,2404

Tabla 5.6.1: Parte real y parte imaginaria de la energía calculada para los estados resonantes del núcleo ^{49}Ca .

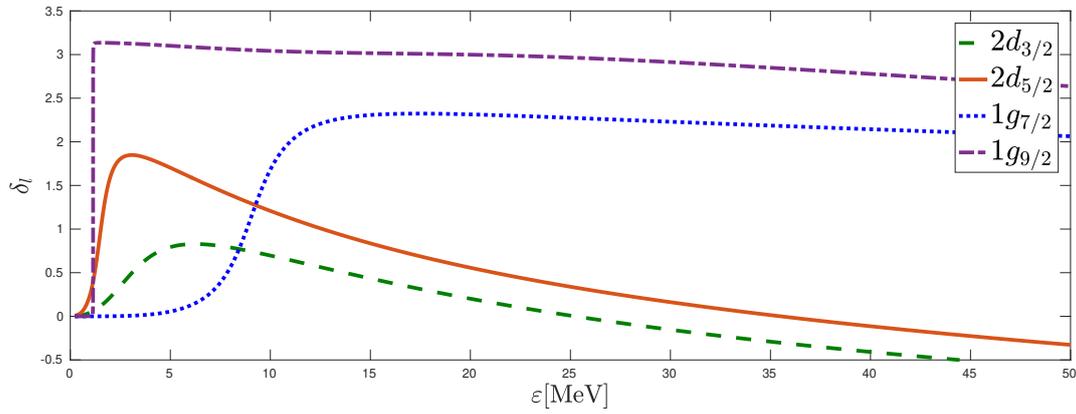


Figura 5.5: Desfase δ_l para diferentes valores de l , correspondientes a las funciones de onda resonantes mostradas en la Figura 3.12.

Contorno para la resonancia $1g_{9/2}$		Contorno para la resonancia $1g_{7/2}$	
Vértice	Puntos Internos	Vértice	Puntos Internos
1.1362	10	3.0874	100
1.1376	10	6.0690	100
1.1390	10	9.0506	100
1.1404	10	12.0322	100
1.1418		15.0138	
Contorno para la resonancia $2d_{5/2}$		Contorno para la resonancia $1h_{11/2}$	
Vértice	Puntos Internos	Vértice	Puntos Internos
0.4537	20	7.0164	20
1.4677	20	8.6194	20
2.4817	20	10.2224	20
3.4957		11.8254	20
		13.4284	
Contorno para la resonancia $1h_{9/2}$		Contorno para la resonancia $1i_{13/2}$	
Vértice	Puntos Internos	Vértice	Puntos Internos
6.0718	200	6.7470	100
20.1670	200	13.2278	100
34.2622	200	19.7086	100
48.3574		26.1894	100
		32.6702	

Tabla 5.6.2: Partición en el espectro del continuo del núcleo ^{49}Ca .

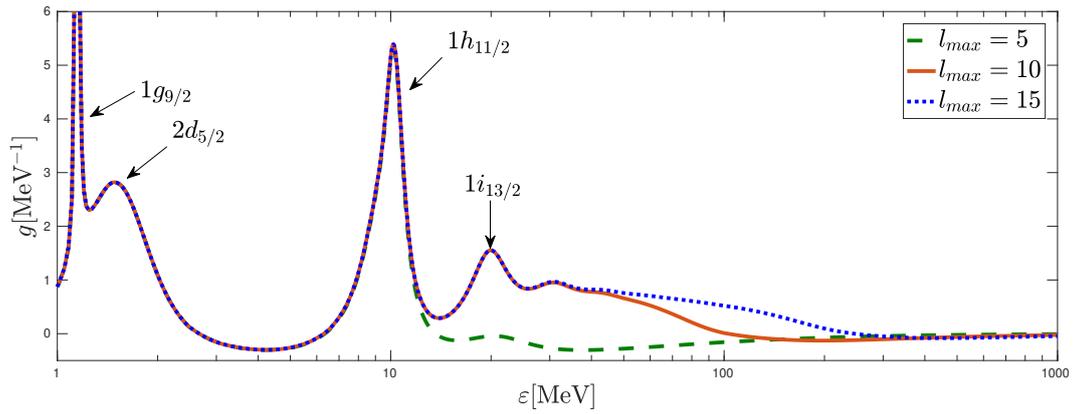


Figura 5.6: Densidad de estados del ^{49}Ca para diferentes cotas de momento angular l hasta una energía de 1000MeV donde se observa la convergencia $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$.

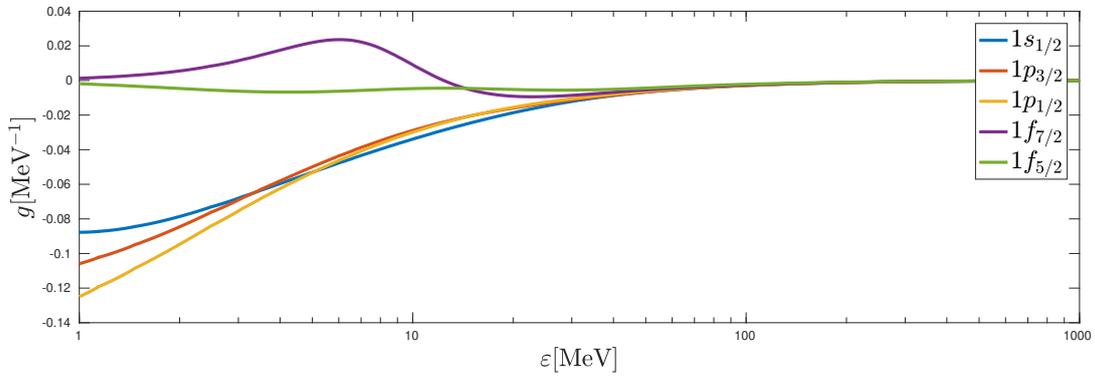


Figura 5.7: Densidad de estados de las ondas parciales no resonantes con $l = 1$ y $l = 3$ para el núcleo ^{49}Ca .

Nuevamente, en la Figura 5.7 se observa la densidad de estados de las ondas parciales no resonantes, donde se aprecia que por su intensidad no influyen en la densidad de estados total de la Figura 5.6.

Capítulo 6

La superconductividad y el núcleo atómico

*“Poesía es la unión de dos palabras que uno nunca supuso que pudieran juntarse,
y que forman algo así como un misterio.”*

Federico García Lorca

Núcleos con varios nucleones fuera de la mayor capa cerrada son llamados *núcleos de capa abierta*. En ellos, la interacción residual toma mayor importancia. Esto es generado por una interacción de corto alcance donde su componente más importante es la correlación de apareamiento entre los nucleones. Este apareamiento entre dos nucleones produce una disminución de la energía total en una cantidad de 2Δ .

A continuación se muestran efectos causados por este apareamiento vistos experimentalmente [26]:

- Reduce la energía de los pares de nucleones, más eficazmente en el estado de momento angular cero. Entonces, el sistema tiende a formar pares con $j = 0$ para disminuir la energía, generando un condensado¹ que es visto experimentalmente en núcleos par-par.
- Excitaciones de un núcleo pueden producirse por la ruptura de uno o más de los pares que forman el condensado. La energía mínima para romper un par es la energía de

¹Entendemos por condensado a la acumulación de pares $j = 0$ en el estado fundamental del sistema.

apareamiento 2Δ sobre el estado fundamental. Esto es visto en núcleos par-par. En el caso de núcleos impar-impar o impar-A, no se observa este “gap” pues existe un nucleón no apareado.

- El apareamiento puede ser visto también como un efecto impar-par, o “staggering” relacionado con las masas de núcleos par-par e impar-A. Experimentos establecieron que la energía de ligadura de un núcleo impar-A es menor que la media de las energías de ligadura de los dos núcleos par-par vecinos. Se define entonces la masa de este núcleo impar-A en función del Δ

$$M_A = \frac{1}{2}(M_{A-1} + M_{A+1}) + \Delta/c^2 \quad (6.1)$$

- Otro efecto del apareamiento es la modificación del momento de inercia. Los momentos de inercia calculados sin apareamiento son dos o tres veces más grandes que los medidos. Esto es interpretado si pensamos que la única parte del núcleo que participa en la rotación es el condensado de pares en la superficie de Fermi.

En este capítulo, presentaremos una introducción a la interacción de pares, una breve descripción cualitativa del modelo de Bardeen, Cooper y Schrieffer, la demostración del resultado exacto del Hamiltoniano dado por Richardson, para luego desarrollar el modelo a utilizar por nosotros en este trabajo.

6.1. La interacción de apareamiento

Existen dos propiedades generales de la fuerza de interacción residual. La primera es que es de corto rango y la segunda es que en la expansión multipolar contiene componentes de altos momentos angulares.

Consideremos dos partículas en el mismo orbital l acopladas a diferentes momentos angulares $J = 0, 1, 2, \dots$. La dependencia radial de las funciones de onda de partícula simple, en la mayoría de los casos, describe partículas moviéndose en órbitas con un radio del orden del radio nuclear (Ver Figuras 3.9 y 3.11). El grado de libertad principal disponible para las partículas corresponde a diferentes orientaciones posibles de los planos orbitales. Las correlaciones entre partículas asociadas son principalmente correlaciones en ángulo. Esto es ilustrado en la Figura

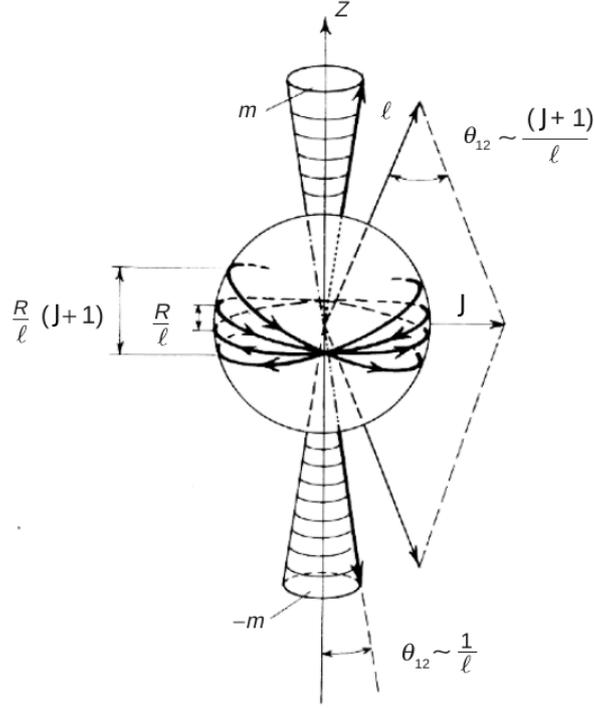


Figura 6.1: Representación esquemática dos órbitas en inversión temporal acopladas a momentos angulares $I = 0$ e $I \neq 0$. Fuente: Nuclear Superfluidity - Broglia, Brink[72].

6.1. Dos nucleones idénticos se mueven en órbitas inversas temporalmente con momento angular l y proyecciones m y $-m$. Cuando ambas partículas están acopladas a un momento angular $J = 0$, sus órbitas están inclinadas un ángulo $\theta_{12} \sim 1/l$. Esto es consecuencia del principio de incerteza de Heisenberg para variables conjugadas $\Delta l \Delta \theta_{12} \sim 1$. Desde un punto de vista clásico donde las partículas están localizadas en una órbita de radio R , la distancia entre partículas sería del orden de R/l .

Si ahora consideramos un estado de la configuración l^2 con $J \neq 0$, entonces el ángulo de separación θ_{12} será mayor. Esto aumentará la separación media entre partículas. Consecuentemente, los estados con mayor J poseerán una energía de interacción menor que aquellos con menor J . Dicho de otra manera, a mayor J , menor es el apareamiento entre nucleones.

En base a esto, la fuerza entre pares es una aproximación a un potencial de corto rango y es definida de forma que la energía E_I de un par sea grande cuando $J = 0$ y cero para $J \neq 0$. Se puede expresar en forma de segunda cuantización mediante la utilización del operador de creación de pares

$$P_j^\dagger = \sum_{m>0} (-1)^{j-m} a_{jm}^\dagger a_{j-m}^\dagger \quad (6.2)$$

y el correspondiente operador de destrucción de pares

$$P_j = \sum_{m>0} (-1)^{j-m} a_{j-m} a_{jm} \quad (6.3)$$

El operador P_j^\dagger crea un par de nucleones (por ej. neutrones) con momento angular total $J = 0$ cuyo estado normalizado $|(jj)_0\rangle$ puede escribirse como

$$|(jj)_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{j + \frac{1}{2}}} P_j^\dagger |0\rangle \quad (6.4)$$

El potencial de interacción de la fuerza de apareamiento es definido como[26]

$$V = -GP_j^\dagger P_j \quad (6.5)$$

y con este potencial, la energía de interacción de un par es

$$E_I = \begin{cases} -G(j + \frac{1}{2}) & \text{si } J = 0 \\ 0 & \text{si } J \neq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

El potencial de apareamiento puede ser generalizado al caso donde el par de nucleones puede ocupar uno de varios orbitales j . Esto es

$$V = - \sum_{jj'} G(jj') P_j^\dagger P_j \quad (6.7)$$

Para entender las propiedades físicas del potencial de otra manera, reescribimos

$$a_{jm}^\dagger = a_\nu^\dagger \quad \text{y} \quad (-1)^{j-m} a_{j-m}^\dagger = a_{\bar{\nu}}^\dagger \quad (6.8)$$

El operador a_ν^\dagger crea un nucleón en el estado de partícula simple $|\nu\rangle = |jm\rangle$ y $a_{\bar{\nu}}^\dagger$ crea un nucleón idéntico en el estado inverso temporal $|\bar{\nu}\rangle = (-1)^{j-m} |j - m\rangle$. El potencial de apareamiento generalizado queda entonces

$$V = - \sum_{\nu\nu'>0} G_{\nu\nu'} P_\nu^\dagger P_{\nu'} \quad (6.9)$$

donde $P_\nu^\dagger = a_{\bar{\nu}}^\dagger a_\nu^\dagger$ y $P_\nu = a_{\bar{\nu}} a_\nu$. La suma en la ecuación (6.9) es sobre los $\nu > 0$ y $\nu' > 0$ que se corresponden con m y m' positivos. La intensidad de apareamiento $G_{\nu\nu'}$ es una amplitud que mide la transición de un par de nucleones en el estado $|\nu'\rangle$ y el inverso temporal $|\bar{\nu}'\rangle$ al estado $|\nu\rangle$ y su inverso temporal $|\bar{\nu}\rangle$. El potencial de apareamiento produce correlaciones entre pares de nucleones en estados inversos temporales. Un estimado para la intensidad de apareamiento es[16]

$$G \approx \frac{28}{A} \text{MeV} \quad (6.10)$$

6.2. Los pares de Cooper y la BCS

La teoría de superconductividad fue desarrollada en 1957[73], cuarenta y seis años después del descubrimiento experimental de ella[74]. En aquel entonces, se conocía teóricamente la superfluidez del ^4He . Pero la diferencia básica es que en el primer caso tratamos con electrones, o sea, fermiones, mientras que en el segundo bosones.

Pese a esto, dos fermiones pueden tomarse como una cuasipartícula de Bose si se encuentran en un estado cuántico ligado en la aproximación de cuasibosón. ¿Cómo entonces podemos tener dos electrones ligados, si tienen la misma carga y por lo tanto se repelen? La respuesta a esto parte de saber que, en una red, los fonones (vibraciones de la red) se propagan con frecuencias que dependen de la masa atómica. Uno podría imaginar que un electrón excita un fonón mientras que otro electrón lo absorbe, induciendo así una interacción no electrostática entre electrones. A esto llamamos interacción electrón-electrón débil. Pero lamentablemente, por la mecánica cuántica, esta interacción es únicamente posible en 1D y 2D, mientras que en 3D esta atracción debe ser mucho más fuerte como para poder ligar.

Este problema fue solucionado por Leon Cooper en 1956[75]. Para entender la idea, supongamos que tenemos electrones en un metal, donde la carga positiva está distribuida uniformemente en todo el volumen y compensa completamente las cargas de los electrones. Dentro de cada diferencial de volumen del metal, los electrones, por ser partículas de Fermi, tienen diferente momento j, m , desde los más bajos hasta un límite. Este último nivel ocupado, determina la “superficie” de Fermi, que contiene en su interior al “volumen” de Fermi. Podríamos imaginarnos una esfera, cuyo radio es definido por la energía de Fermi, y cada uno de los puntos de su superficie corresponden a diferentes direcciones del vector momento de los electrones. Solo

estos electrones en la superficie son capaces de promover su nivel, sin necesidad de una gran cantidad de energía. Esto implica que esos electrones que se encuentran en la superficie de Fermi, viven en un espacio de 2D y no de 3D, por lo que estos electrones pueden formar estados ligados pese a la interacción débil.

Estos pares de electrones ligados, llamados pares de Cooper, forman el estado fundamental en la superficie de Fermi de los superconductores. En medio año después, J. Bardeen, L. Cooper y R. Schrieffer realizan la publicación científica[73] donde se desarrolla la teoría de la superconductividad basada en este apareamiento entre electrones.

6.3. El apareamiento en el núcleo

La comunidad de física nuclear en Copenhague inmediatamente se vio tentada por la teoría de la BCS. Buscaron atribuir el “gap” entre el estado fundamental y el primer estado excitado de un nucleido par-par a la existencia de pares de Cooper entre los nucleones[76]. Pese a que los electrones y los nucleones son partículas de Fermi, no es tan simple asumir que el “gap” es creado por pares de Cooper pues existen diferencias importantes, como por ejemplo el campo medio en el cual se encuentran y la intensidad de la interacción espín-órbita.

Las ligaduras entre nucleones deben en efecto existir e influyen prácticamente en todas las características a bajas energías del núcleo. Pese a esto, así como la interacción de apareamiento entre nucleones debe existir, la teoría de la BCS no es suficiente para tener en cuenta todas las correlaciones de pares que suceden en sistemas finitos.

El estado fundamental de un núcleo con número de neutrones y protones par se obtiene apareando los nucleones en estados de valencia en la capa vacía con energía cercana a la de Fermi como para formar pares de momento angular cero. Los estados excitados se forman a orden cero por ruptura de pares, siendo el primer estado excitado aquel que se forma rompiendo un solo par. Estos estados tienen una energía de excitación del orden de 2Δ que es la energía de asociación de pares.

Valores para la energía de apareamiento de neutrones pueden ser obtenidos a través de las energías de separación $S_n(N, Z)$ medidas usando la fórmula[26]

$$\Delta_n = \frac{1}{4} \{2S_n(N, Z) - S_n(N + 1, Z) - S_n(N - 1, Z)\} \quad (6.11)$$

Valores empíricos de este parámetro son presentados en la Figura 6.2 en comparación con la fórmula dada por Bohr y Mottelson en 1969[16]

$$\Delta \approx \frac{12}{A^{1/2}} \text{MeV} \quad (6.12)$$

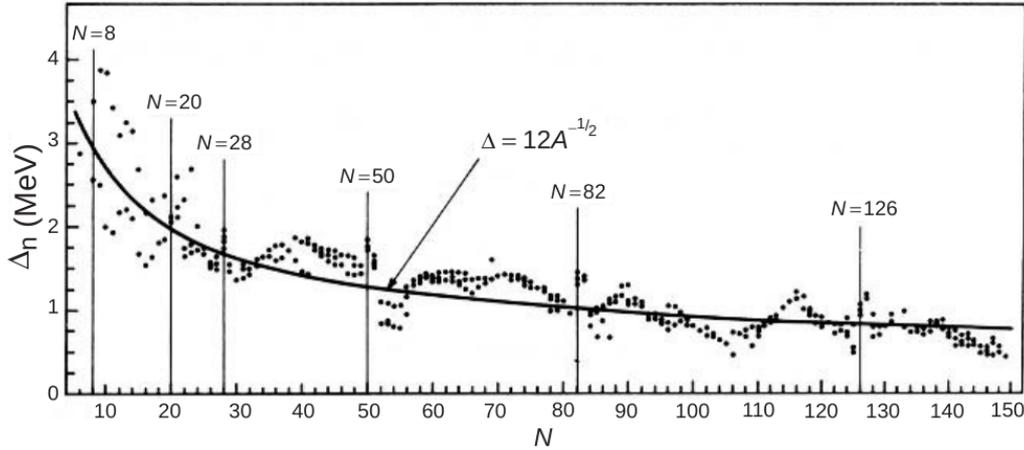


Figura 6.2: Valores experimentales del “gap” de apareamiento nuclear. Fuente: Nuclear Superfluidity - Broglia, Brink[72].

Si comparamos con la superconductividad en sólidos, la longitud de correlación en un superconductor se define como[10]

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{2\Delta} \quad (6.13)$$

donde v_F es la velocidad de Fermi. Físicamente, es una medida del tamaño del par de Cooper. En un superconductor, la longitud de correlación es grande en comparación con la distancia interatómica pero pequeña en comparación con el tamaño de una pieza de metal superconductor. Para el caso de un núcleo, el número de onda de Fermi vale en general $k_F = 1,36 \text{fm}^{-1}$, tenemos entonces que $\hbar v_F = 54 \text{MeV}$. Entonces, la longitud de correlación en un núcleo es

$$\xi \approx \frac{27}{\Delta} \text{fm} \quad (6.14)$$

donde el “gap” está dado en unidades de MeV. Para un núcleo típico con $A = 140$, $\Delta \approx 1 \text{MeV}$, tendemos que $\xi \approx 27 \text{fm}$. Para estos núcleos, $R = 1,2A^{1/3} \text{fm} \approx 6,3 \text{fm}$, por ende la longitud de correlación es más grande que el radio nuclear. El mismo resultado persiste para cualquier núcleo de la tabla periódica. Esto genera que efectos cuánticos del apareamiento puedan modificar las

propiedades de un núcleo, como comentamos al principio del capítulo.

6.4. El modelo de Richardson

Bardeen, Cooper y Schrieffer logran describir la superconductividad, tomando una aproximación que viola el principio de conservación de partículas. Como las fluctuaciones del número de partículas en la BCS son del orden de $(\sqrt{N})^{-1}$, funciona entonces para sistemas como metales donde N es del orden del número de Avogadro. Claramente, esto no sucede en un núcleo mediano como es el Calcio.

En el Apéndice A.1 se detalla la demostración de las ecuaciones de Richardson[5, 6] siguiendo el artículo científico presentado por von Delft y Braun [77] en 1999. La solución exacta al siguiente Hamiltoniano de apareamiento

$$H = \sum_{j\sigma} \varepsilon_j a_{j\sigma}^\dagger a_{j\sigma} - G \sum_{ij} a_{i+}^\dagger a_{i-}^\dagger a_{j+} a_{j-} \quad (6.15)$$

con acople

$$G = \frac{\chi}{A} \quad (6.16)$$

es entonces

$$1 - \sum_j^U \frac{G}{2\varepsilon_j - E_{J_\nu}} + \sum_{\mu=1(\neq\nu)}^n \frac{2G}{E_{J_\mu} - E_{J_\nu}} = 0, \quad \text{para } \nu = 1, \dots, n \quad (6.17)$$

Estas constituyen un sistema de n ecuaciones acopladas (recordemos que n es el número de pares) para las energías E_{J_1}, \dots, E_{J_n} . Además, como tomamos a todas las energías ε_j distintas, a medida que $G \rightarrow 0$, cada solución $\{E_{J_1}, \dots, E_{J_n}\}$ tiende suavemente a los polos $\{\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n}\}$.

Para completar, definimos para un dado autoestado, la energía total, la probabilidad de ocupación del nivel j y el “gap” de la BCS como [78]

$$E = \langle H \rangle = \sum_{J_\nu=1}^n E_{J_\nu} \quad (6.18)$$

$$v_j^2 = \langle N_j \rangle = -G^2 \frac{d}{dG} \left[\sum_{J_\nu=1}^n \frac{1}{2\varepsilon_j - E_{J_\nu}} \right] \quad (6.19)$$

$$\Delta = \sum_j^U \Delta_j = \sum_j^U G(j_j + 1/2)v_j \sqrt{1 - v_j^2} \quad (6.20)$$

La expresión (6.20) nos permite estimar el nivel de Fermi λ_F del sistema mediante [72]

$$N = \langle N \rangle \approx \sum_j^U (j_j + 1/2) \left[1 - \frac{\varepsilon_j - \lambda_F}{\sqrt{(\varepsilon_j - \lambda_F)^2 + \Delta^2}} \right] \quad (6.21)$$

donde N es la cantidad de neutrones que tenemos ocupando los niveles de partícula simple ε_j por sobre el carozo.

En el Apéndice A.2, se encuentra también un mapeo electrostático de las soluciones de Richardson, presentado por él y Gaudin como analogía al modelo cuántico [79, 80].

6.5. Nuestro modelo

La diferencia entre el modelo que utilizaremos y el desarrollado en la sección anterior, radica en que nosotros implementaremos el espectro del continuo. Haciendo uso de la densidad de estados del continuo, presentada y desarrollada en el Capítulo 5, podemos reescribir las llamadas ecuaciones de Richardson como [68]

$$1 - \sum_j^U \frac{G}{2\varepsilon_j - E_{J_\nu}} - \frac{G}{2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{2\varepsilon - E_{J_\nu}} + \sum_{\mu=1(\neq \nu)}^n \frac{2G}{E_{J_\mu} - E_{J_\nu}} = 0 \quad (6.22)$$

donde $g(\varepsilon)$ está definida en la ecuación (5.18). Partiendo de las soluciones complejas de este sistema de ecuaciones, se obtiene la energía de ligadura del núcleo definida como

$$E_{Bin} = \sum_{J_\nu=1}^n E_{J_\nu} \quad (6.23)$$

donde recordemos que n es el número de pares por fuera del carozo.

Además, definimos la energía de apareamiento como

$$P_{Rich} = 2\varepsilon_0 - \Re(E_{J_n}) \quad (6.24)$$

donde ε_0 se corresponde con el estado de partícula simple de menor energía y E_{J_n} la solución de las ecuaciones de Richardson cuya parte real es la de menor energía.

Por otro lado, haciendo uso de las probabilidades de ocupación de los niveles de partícula simple mediante la ecuación (6.19), podemos estimar qué parte del total de las partículas se establece en estados del continuo N_{cont} mediante

$$N = N_{lig} + N_{cont} \quad (6.25)$$

donde $N = 2n$ es el número de partículas totales y $N_{lig} = \sum_j d_j v_j^2$ con $d_j = 2j + 1$ la degeneración del nivel j de partícula simple.

Para establecer la constante de apareamiento G , se ajustó el parámetro χ de la ecuación (6.16) mediante dos estándares:

1. Ajustando χ de forma que la E_{Bin} calculada para el núcleo se corresponda con la energía de ligadura experimental E_{exp} obtenida de Ref. [19].
2. Ajustando χ de forma que la P_{Rich} calculada para el núcleo se corresponda con la energía de apareamiento experimental definida como

$$P_{exp}(A, Z) = \frac{1}{4}(-1)^{A-Z} [S_n(A, Z) - 2S_n(A - 1, Z) + S_n(A - 2, Z)] \quad (6.26)$$

donde las constantes S_n son obtenidas de tablas experimentales [19].

En base a esto, se ajustaron los datos de la E_{Bin} de un núcleo en principio de capa, uno en mitad y uno al final de capa, mientras que por disponibilidad de datos experimentales, la P_{Rich} se ajustó a un núcleo en principio de capa y uno en mitad. Además, como la constante de apareamiento G depende de la forma de representar a los estados del continuo [81], y por ende χ , para cada núcleo ajustado se identificaron dos χ , uno teniendo en cuenta el continuo y otro sin este. Esto finalmente implica, que para cada núcleo, tengamos cinco posibles valores de G a considerar en cada representación.

Para identificar que método ajusta mejor, se utilizan los residuos calculados mediante

$$Res = \frac{\sum_i (E_{bin}^i - E_{exp}^i)^2}{\sqrt{N(N-1)}} \approx \frac{\sum_i (E_{bin}^i - E_{exp}^i)^2}{N} \quad (6.27)$$

donde i recorre a todos los isótopos calculados.

6.6. El código

El objetivo de utilizar un código computacional es resolver el sistema de ecuaciones no lineales acopladas de Richardson dado en (6.22), con una densidad de estados $g(\varepsilon)$ definida previamente, partiendo de un $G = 2$, para luego comenzar a acercarse al valor físico de G . Para ello, se utilizaron dos lenguajes de programación: Fortran77 y Python 3.7.

El código en Fortran77 resuelve el sistema basándose en la rutina *HYBRJ1* de *MINPACK*. Esta encuentra los ceros de un sistema de ecuaciones no lineales de N variables mediante una modificación del método *Powell-Hybrid*. Para que las soluciones del sistema tengan significado físico, se chequean las posiciones de las soluciones de las ecuaciones de forma que a medida que se reduce la constante G hasta alcanzar el valor físico, las energías de Richardson se acomodan alrededor de los polos físicos, teniendo en cuenta la degeneración de estos. El beneficio de utilizar este lenguaje es la velocidad de cálculo para aquellos núcleos cuyos neutrones comienzan a poblar el continuo, es decir, aquellos mayores a ^{60}Ca .

Por otro lado, el lenguaje Python nos da la libertad de elegir que método utilizar para resolver el sistema de ecuaciones. Haciendo uso de la librería *scipy*, el código utiliza los siguientes métodos, en función de cual de ellos realiza el cálculo en un menor tiempo:

- `method=hybr`: Al igual que en Fortran, utiliza una modificación del método *Powell-Hybrid*.
- `method=lm`: Se basa en una modificación del algoritmo *Levenberg-Marquardt*.
- `method=krylov`: Utiliza la aproximación de Krylov para la inversa del Jacobiano.

Pese a que programar en este lenguaje fue más simple que en Fortran77, presenta la desventaja de que el tiempo de cálculo, en particular para aquellos núcleos por sobre el ^{60}Ca , es extremadamente alto. Esto es, aproximadamente 15 minutos de cálculo, cuando el código en Fortran solo demora alrededor de 1 minuto. Como ventaja, la posibilidad de elegir entre varios métodos de resolución del sistema permite obtener resultados para la amplia mayoría de los valores de G .

Además de resolver el sistema, ambos códigos obtienen la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple basados en la ecuación (6.19) y la energía de ligadura definida en la ecuación (6.23).

Capítulo 7

Carozo ^{40}Ca

Haciendo uso de lo descrito en el capítulo anterior, se calculará la energía de ligadura del estado fundamental para isótopos del Calcio, respecto al núcleo de capa cerrada ^{40}Ca . Además, se identificará la línea de goteo de un neutrón y dos neutrones del Calcio y la importancia del continuo a la hora de cuantificar los resultados.

7.1. Ajuste del χ

La energía de ligadura experimental E_{exp} de los núcleos pares, partiendo desde el ^{42}Ca hasta el ^{58}Ca , respecto a nuestro carozo, el ^{40}Ca , se obtienen de las tablas en Ref. [19], las cuales se calculan mediante:

$$E_{exp} = ZM(^1H) + NM(^1n) - M(A, Z) \quad (7.1)$$

donde las masas M son medidas. En la Tabla 7.1.1 se presentan estas energías y también las energías de apareamiento experimentales P_{exp} ¹ calculadas mediante la ecuación (6.26).

Entonces, para este análisis se obtuvieron los χ de la ecuación (6.16), presentados en la Tabla 7.1.2. Si observamos detalladamente, el efecto del continuo en la constante χ es tal que, su mera presencia, implica que el modelo se ajusta de forma que la variación entre núcleo y núcleo de χ sea menor que para el caso sin el espectro continuo de energía. Esto puede entenderse como que la presencia del continuo permite a los neutrones no estar tan apareados para lograr formar un núcleo estable.

¹ P_{exp} es calculada hasta ^{52}Ca inclusive por la falta de datos experimentales fehacientes de S_n para los núcleos ^{54}Ca , ^{56}Ca y ^{58}Ca .

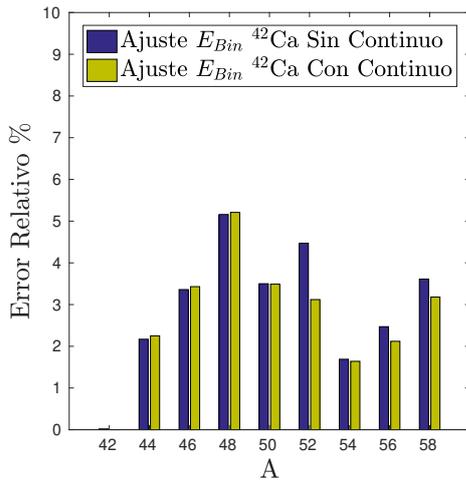
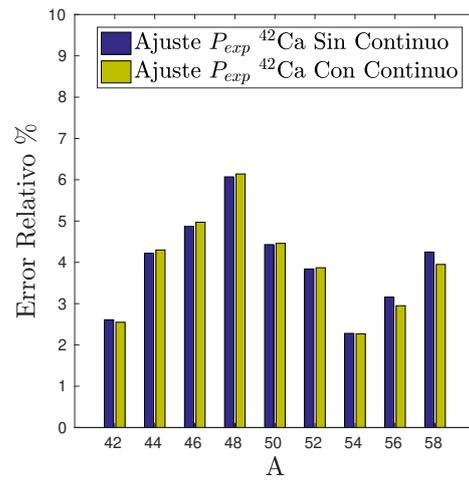
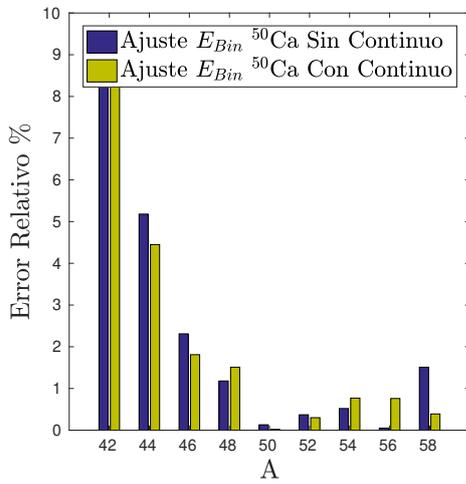
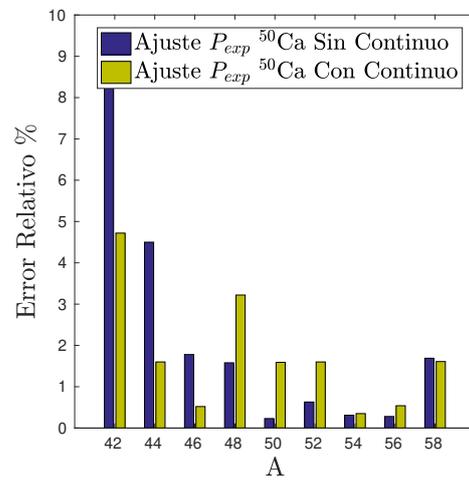
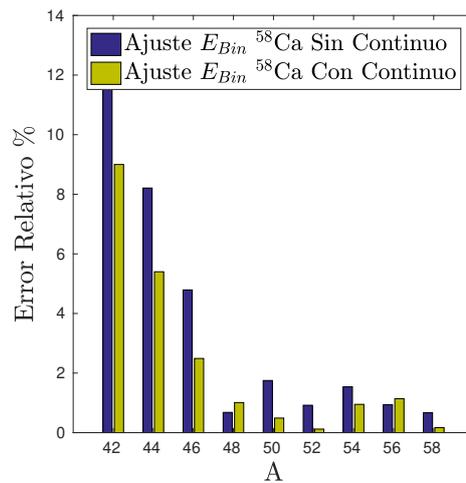
Núcleo	E_{exp} [MeV]	P_{exp} [MeV]
^{42}Ca	-19,8435	-19,323
^{44}Ca	-38,9076	-18,412
^{46}Ca	-56,721	-18,401
^{48}Ca	-73,9488	-18,175
^{50}Ca	-85,456	-18,230
^{52}Ca	-96,2757	-17,410
^{54}Ca	-103,31	-
^{56}Ca	-108,2	-
^{58}Ca	-112,4	-

Tabla 7.1.1: Energías de ligadura experimentales para isótopos del calcio respecto al carozo ^{40}Ca .

Ajuste al núcleo	Con Continuo		Sin Continuo	
	χ [MeV] Ajustando E_{exp}	χ [MeV] Ajustando P_{exp}	χ [MeV] Ajustando E_{exp}	χ [MeV] Ajustando P_{exp}
^{42}Ca	17,132	15,313	23,587	20,362
^{50}Ca	21,880	22,005	33,825	32,955
^{58}Ca	22,388	-	37,700	-

Tabla 7.1.2: Ajuste de χ a diferentes núcleos mediante distintos métodos.

A partir de estos datos, procedimos a calcular la energía de ligadura de cada uno de los isótopos pares del Calcio. En la Figura 7.1 se observa el error relativo de la energía de ligadura calculada respecto a los datos experimentales para distintos ajustes de χ . A partir de estas Figuras, vemos que ajustando el χ a principio de capa (Figuras 7.1a y 7.1b) el error relativo es en promedio del 4% durante todo el análisis. En cambio, ajustando a mitad de capa (Figuras 7.1c y 7.1d) o a final de capa (Figura 7.1e), se aprecia un error significativo al principio, pero luego disminuye de manera pronunciada. En base a esto, podríamos establecer que para identificar la línea de goteo del Calcio, es preferible el ajuste de χ con un isótopo a final de capa, como es el ^{58}Ca .

(a) χ ajustado a $E_{exp}^{42}\text{Ca}$.(b) χ ajustado a $P_{exp}^{42}\text{Ca}$.(c) χ ajustado a $E_{exp}^{50}\text{Ca}$.(d) χ ajustado a $P_{exp}^{50}\text{Ca}$.(e) χ ajustado a $E_{exp}^{58}\text{Ca}$.Figura 7.1: Error relativo de la energía de ligadura calculada respecto a los datos experimentales para distintos ajustes de χ .

Por otro lado, para identificar mediante qué modelo el ajuste es más efectivo durante toda la capa, es decir, desde $A = 42$ hasta $A = 58$, se utiliza el cálculo de los residuos presentado en la ecuación (6.27). Los resultados se muestran en la Tabla 7.1.3. A partir de estos datos, concluimos que la mejor opción para describir los isótopos pares del Calcio con la mayor precisión es ajustar el χ con un nucleido a mitad de capa, en este caso con $A = 50$.

Otro dato importante que sacamos desde la Tabla 7.1.3, es que a la hora de describir el sistema, utilizar una representación que incluya los estados del continuo influye en el resultado final de forma positiva, propiciando un mejor ajuste a los datos experimentales, pues como vemos, el residuo es menor. Observamos también que los residuos se encuentran aproximadamente entre 1 y 10. Esta discrepancia radica en la alta ineficiencia que genera ajustar a principio de capa, pues como vemos, los residuos en estos casos se encuentran entre 6 y 10. Esto puede deberse a que el ajuste es realizado en función de datos experimentales de núcleos cuyos estados se encuentran distantes del cierre de capa y los estados de energía continua.

Representación	Ajuste con	χ	Residuo
Con Continuo	$E_{exp} \text{ }^{42}\text{Ca}$	17,132	6,4717
	$E_{exp} \text{ }^{50}\text{Ca}$	21,880	1,0625
	$E_{exp} \text{ }^{58}\text{Ca}$	22,388	1,4306
	$P_{exp} \text{ }^{42}\text{Ca}$	15,313	10,5884
	$P_{exp} \text{ }^{50}\text{Ca}$	22,005	1,6672
Sin Continuo	$E_{exp} \text{ }^{42}\text{Ca}$	23,587	7,7694
	$E_{exp} \text{ }^{50}\text{Ca}$	33,825	1,4209
	$E_{exp} \text{ }^{58}\text{Ca}$	37,700	3,2081
	$P_{exp} \text{ }^{42}\text{Ca}$	20,362	10,3677
	$P_{exp} \text{ }^{50}\text{Ca}$	32,955	1,3628

Tabla 7.1.3: Residuos para los distintos χ .

7.2. Comportamiento de las energías de Richardson

Recordemos que en el Apéndice A.2, se presentaba una analogía electrostática con respecto a las ubicaciones de las energías de Richardson E_i en el plano complejo. En este caso esperamos

que suceda de manera similar. Si comparamos las Figuras 7.2a y 7.3a, vemos que existe una relación muy importante entre las energías de Richardson y su ubicación en el plano complejo, con la representación que se utilice. Esto a su vez se ve confirmado por la Figura 7.4, donde a altos G , los cuales recordemos que no tendrán significado físico, la energía de ligadura calculada con y sin continuo es completamente diferente.

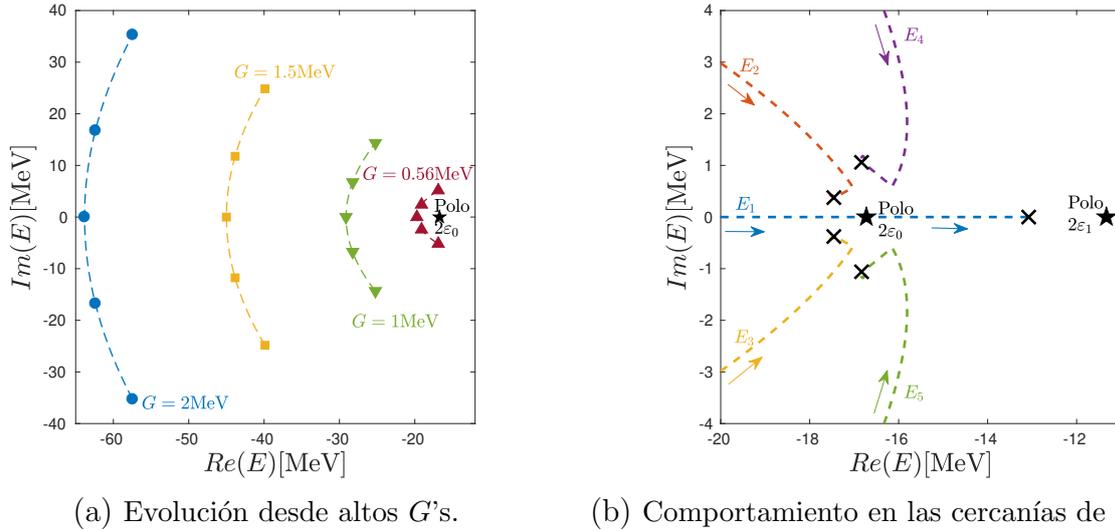


Figura 7.2: Energías de Richardson para el núcleo ^{50}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en un modelo que incluye al continuo.

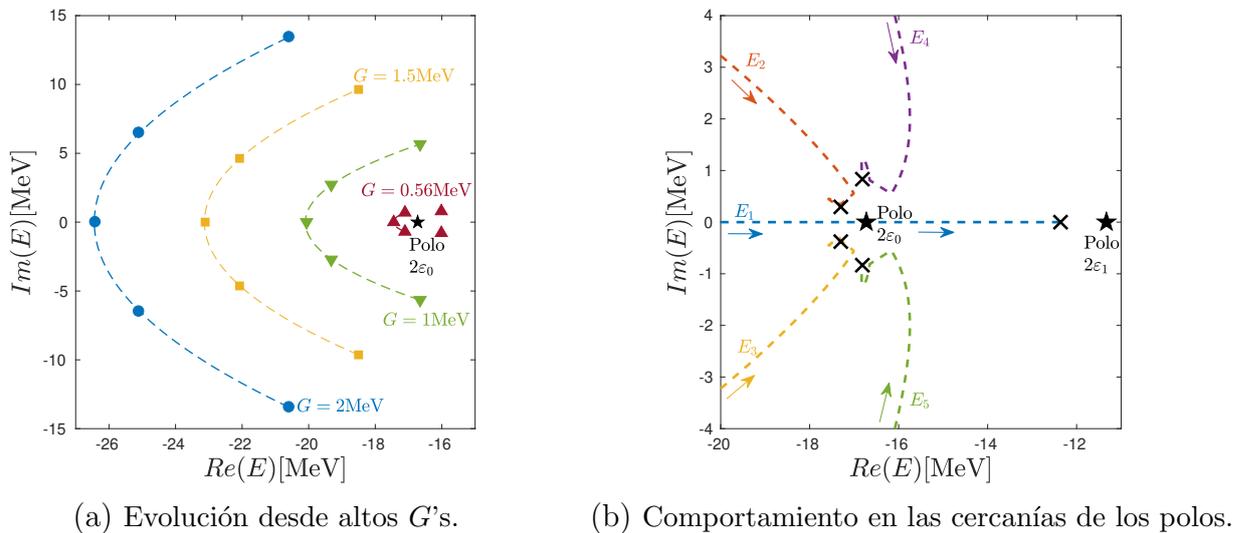


Figura 7.3: Energías de Richardson para el núcleo ^{50}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en una representación sin el continuo.

Por otro lado, si observamos las Figuras 7.2b y 7.3b, el comportamiento de estas energías de Richardson al acercarse a los polos $2\varepsilon_0 = 2\varepsilon_{1f_{7/2}} = -16,7264\text{MeV}$, con degeneración 8,

y $2\varepsilon_1 = 2\varepsilon_{2p_{3/2}} = -11,3776\text{MeV}$, con degeneración 4, resulta ser bastante similar en ambos modelos espaciales. Esto tiene sentido, pues recordemos que el resultado para G físico tiene que ser igual o similar en ambos casos. Observemos también, que las energías se acomodan siempre para ir de a pares, en forma de espejo respecto al eje Real, dado que la estructura de las ecuaciones de Richardson requiere que las soluciones complejas aparezcan en pares conjugados una de otra.

Además, observemos que cuando E_1 en las Figuras 7.2b y 7.3b se aproxima al polo $2\varepsilon_0$, se encuentra con una singularidad en las soluciones de Richardson. Esto implica que la energía “salte” una delta de energía, posicionándose a la derecha del polo. Pero como la energía de ligadura debe ser monótona respecto a G y sin discontinuidades, el resto de las energías, E_2 a E_5 se ven forzadas a correrse hacia la izquierda, compensando así el corrimiento de E_1 . Cuantitativamente, esto se aprecia en el caso de la Figura 7.2b de la siguiente manera: E_1 pasa de -17MeV a -16MeV , saltando el polo $2\varepsilon_0 = -16,7264\text{MeV}$, y las energías restantes se modifican:

$$E_2 = (-17 + i0,6)\text{MeV} \rightarrow (-17,4 + i0,4)\text{MeV} \quad (7.2)$$

$$E_3 = (-17 - i0,6)\text{MeV} \rightarrow (-17,4 - i0,4)\text{MeV} \quad (7.3)$$

$$E_4 = (-16,1 + i0,6)\text{MeV} \rightarrow (-16,7 + i)\text{MeV} \quad (7.4)$$

$$E_5 = (-16,1 - i0,6)\text{MeV} \rightarrow (-16,7 - i)\text{MeV} \quad (7.5)$$

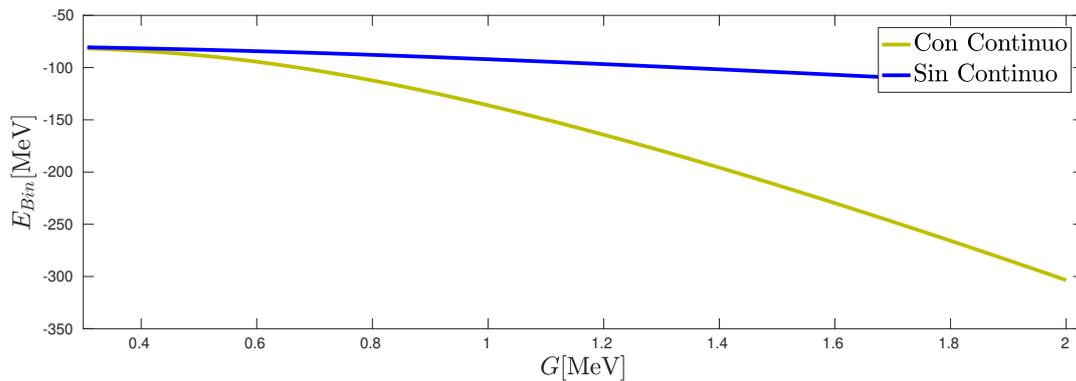


Figura 7.4: Energía de ligadura versus G para el núcleo ^{50}Ca , en las dos representaciones estudiadas.

7.3. Probabilidad de Ocupación y Número de Partículas

Teniendo en cuenta los resultados de la sección 7.1, en esta sección todos los resultados presentados son utilizando el modelo que incluye a los estados del continuo y el $\chi = 21,880\text{MeV}$. Mediante la ecuación (6.19) obtenemos la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple del sistema, ilustrados en la Figura 7.5 para dos núcleos representativos: a mitad de capa, 7.5a, y a cierre de capa, 7.5b.

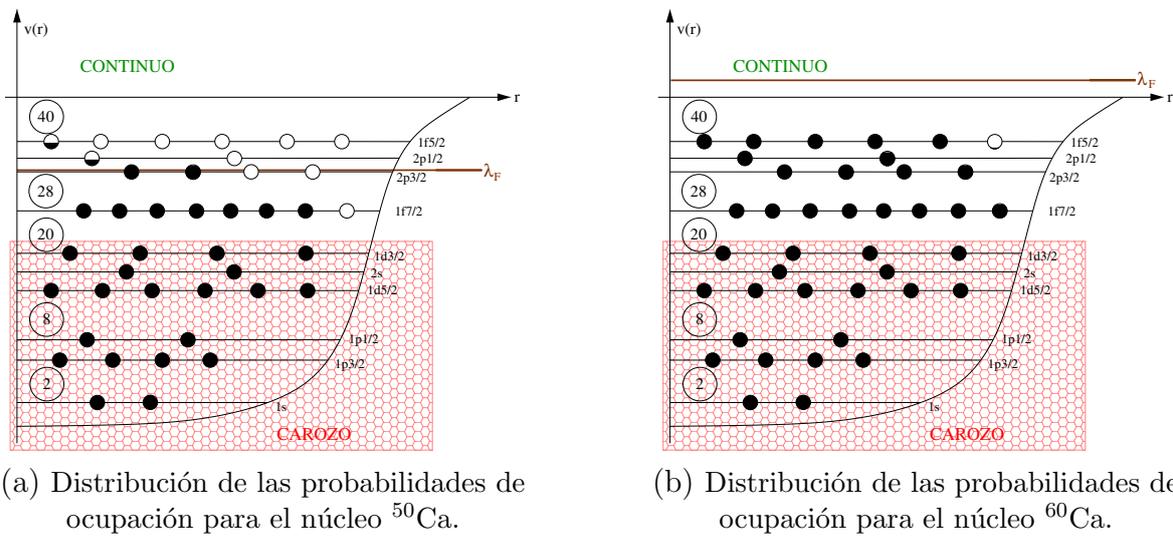


Figura 7.5: Probabilidad de ocupación para dos isótopos del Calcio, respecto al carozo ^{40}Ca . Las esferas representan cuasipartículas con su nivel de ocupación representado por el grado de “llenado” de la esfera.

Los niveles de Fermi explicitados en ambas Figuras, junto a los de otros isótopos, se muestran en la Tabla 7.3.1, siempre y cuando sus neutrones ocupen los niveles de partícula simple (desde $A = 42$ hasta $A = 60$), calculados a través de la ecuación (6.21). Además, vemos el “gap” calculado mediante la ecuación (6.20). Complementando, como la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple debe respetar la estadística de Fermi-Dirac [72], en la Figura 7.6 se presenta la probabilidad de ocupación de todos los isótopos del Calcio calculados y el ajuste mediante la distribución de Fermi

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-b}{a}} + 1} \quad (7.6)$$

donde $b \equiv \lambda_F$ pues se establece como la posición donde la distribución se encuentra a la mitad, como el caso de $|v_j^2| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_j - \lambda_F}{E_j} \right)$ de la BCS [72], y $a \equiv \Delta$, teniendo en cuenta la relación

de Δ con la difusividad en la BCS.

Los resultados también se vuelcan en la Tabla 7.3.1, donde vemos que b tiene el comportamiento del nivel de Fermi λ_F , tal como se esperaba. En cambio, pese a que uno esperaría que a presente el comportamiento de Δ , esto no sucede, pero si existe una similitud en el orden de magnitud. Para poder estimarla con precisión, es necesario incluir la probabilidad de ocupación en el continuo, tarea que excede a este trabajo, por la dificultad de aplicación y las diferencias que existen en el tratamiento del espectro del continuo.

Núcleo	Δ [MeV]	a [MeV] de 7.6	λ_F [MeV]	b [MeV] de 7.6
^{42}Ca	1,2952	1,7280	-9,2121	-10,8154
^{44}Ca	1,5900	1,5212	-8,5171	-9,0187
^{46}Ca	1,6461	1,3118	-7,7555	-7,8644
^{48}Ca	1,5167	1,0870	-6,7507	-6,9467
^{50}Ca	1,4855	1,2368	-5,6441	-5,8683
^{52}Ca	1,3082	0,8126	-4,5657	-4,7705
^{54}Ca	1,1042	0,8615	-3,0212	-3,1052
^{56}Ca	1,1773	1,1684	-1,7044	-2,1380
^{58}Ca	1,0663	1,5010	-0,9583	-0,8068
^{60}Ca	0,7777	2,5681	-	3,3026
^{62}Ca	0,4860	3,2529	-	6,3151
^{64}Ca	0,5554	3,9192	-	9,5925

Tabla 7.3.1: Gap y Nivel de Fermi calculado mediante dos métodos distintos partiendo del carozo ^{40}Ca cuyo modelo incluye al continuo. Para ^{60}Ca , ^{62}Ca y ^{64}Ca no existen soluciones para la ecuación (6.21) pues en estos casos $N > 18$ y $\lambda_F > 0$.

Por otro lado, en la Tabla 7.3.2 observamos el número de partículas en el estado discreto así como aquellas en el continuo, calculado a partir de la ecuación (6.25). Si analizamos dicha Tabla, vemos que a medida que aumenta el número de partículas en el sistema y el nivel de Fermi se acerca al continuo, aumenta también la proporción de dichas partículas que empiezan a poblar el continuo. Es por ello que la participación de las energías del continuo es más importante en aquellos isótopos donde comienza a ser significativo el valor de N_{Cont} .

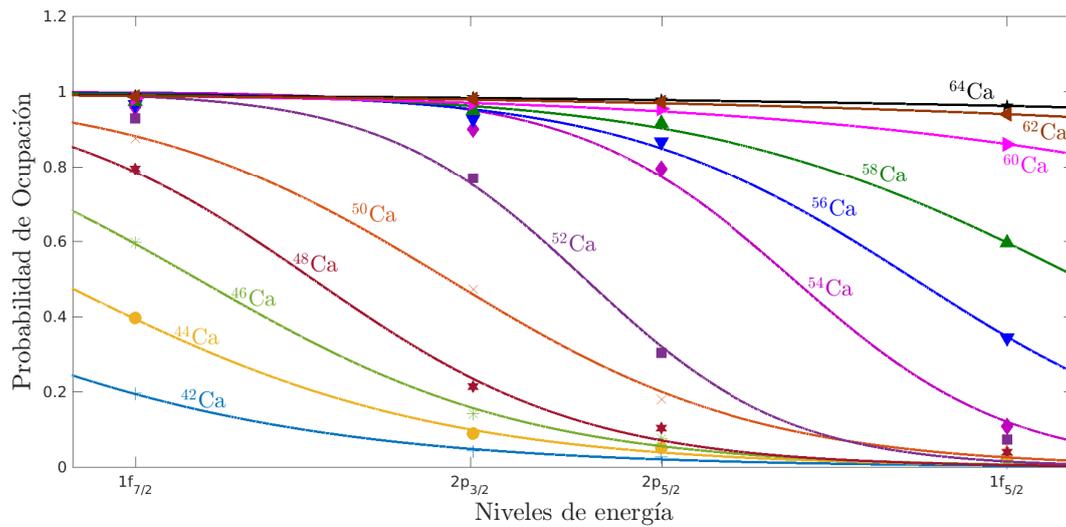


Figura 7.6: Probabilidad de ocupación para isótopos del Calcio ajustadas mediante la ecuación 7.6.

Núcleo	N_{lig}	N_{cont}	Núcleo	N_{lig}	N_{cont}
^{42}Ca	1,8634	0,1366	^{54}Ca	13,5106	0,4894
^{44}Ca	3,7626	0,2374	^{56}Ca	15,2246	0,7754
^{46}Ca	5,6954	0,3046	^{58}Ca	16,9896	1,0104
^{48}Ca	7,6638	0,3362	^{60}Ca	18,8006	1,1994
^{50}Ca	9,5958	0,4042	^{62}Ca	19,1898	2,8102
^{52}Ca	11,5592	0,4408	^{64}Ca	19,4512	4,5488

Tabla 7.3.2: Número de neutrones en los estados discretos y en el continuo para isótopos del Calcio respecto al carozo ^{40}Ca .

Niveles	^{42}Ca		^{50}Ca		^{60}Ca	
	Con Continuo	Sin Continuo	Con Continuo	Sin Continuo	Con Continuo	Sin Continuo
$1f_{7/2}$	0,1955	0,2096	0,8762	0,9029	0,9820	0,9982
$2p_{3/2}$	0,0430	0,0461	0,4721	0,5115	0,9684	0,9982
$2p_{1/2}$	0,0256	0,0274	0,1800	0,1876	0,9540	0,9982
$1f_{5/2}$	0,0127	0,0136	0,0563	0,0568	0,8605	0,9982

Tabla 7.3.3: Probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple de los isótopos ^{42}Ca , ^{50}Ca y ^{60}Ca respecto al carozo ^{40}Ca .

Finalmente, en la Tabla 7.3.3 observamos la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple para tres núcleos representativos, en los dos modelos utilizados: con energías del continuo y sin ellas. En ella apreciamos que el llenado de los niveles se da con mayor velocidad cuando la representación no incluye a los estados del continuo. Esto se debe a que los únicos estados disponibles en dicha representación son los de partícula simple.

7.4. Energía de ligadura

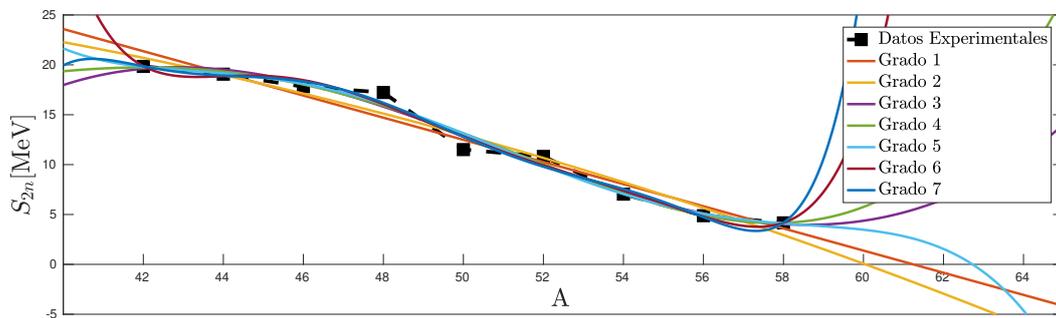


Figura 7.7: Energías de separación de dos neutrones para isótopos del Calcio obtenidas experimentalmente y el ajuste mediante polinomios de grado 1 a 7.

Teniendo en cuenta los resultados de la sección 7.1, presentamos en la Figura 7.8 la energía de ligadura de los diferentes isótopos del Calcio con número de neutrones pares, calculado con $\chi = 21,880\text{MeV}$. Observamos en ella que incluir los estados del continuo en nuestro análisis nos permite estimar al isótopo ^{60}Ca como el último ligado. Esta predicción, es comparable con la obtenida con métodos *ab initio* [82] que definen al ^{60}Ca , pero discrepa con método más recientes [59], que establecen al ^{68}Ca como el posible último núcleo ligado.

Además, observamos que para los núcleos que se encuentran con A entre 42 y 48, la predicción teórica se separa del resultado experimental. Esta es una de las consecuencias de ajustar χ a un núcleo a mitad de capa, como también vemos reflejado en la Figura 7.1c. Por otra parte, es claro que la presencia del continuo refleja un mejor ajuste de los datos teóricos, especialmente para $A > 52$, donde nos acercamos al cierre de capa y comienzo de los estados de energía positiva.

En cambio, si tenemos en cuenta nuestra variedad de ajustes de la constante χ , y por ende variedad de modelos, presentamos en la Figura 7.9 todas las energías calculadas con los

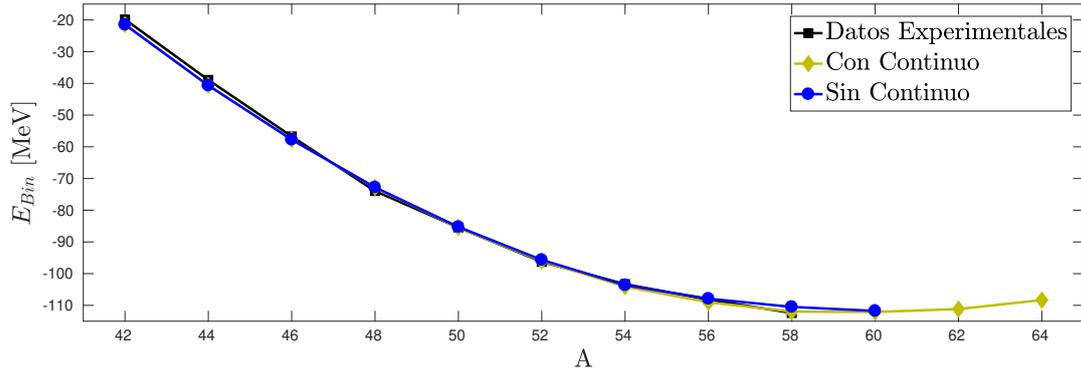
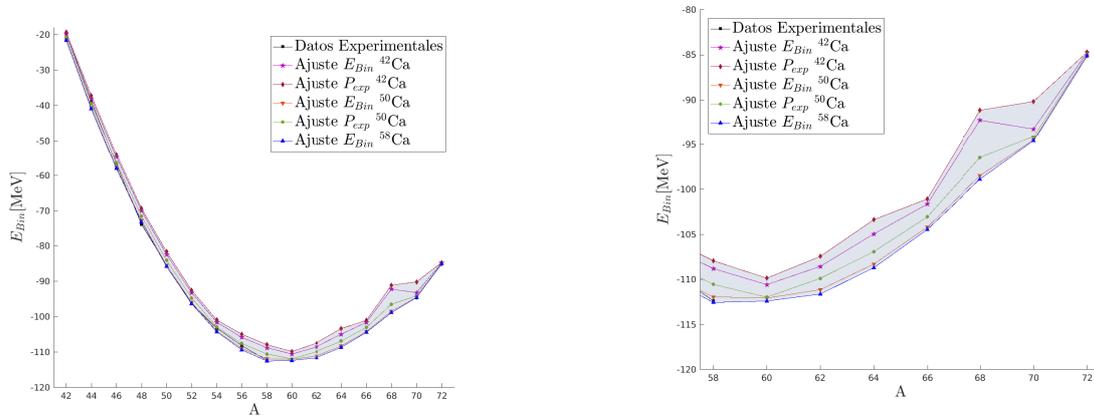


Figura 7.8: Energías de ligadura obtenida para diferentes isótopos del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca .

diferentes valores de χ , siempre con el modelo incluyendo al continuo. El área de posibles resultados de la energía de ligadura es la que se encuentra pintada de azul. Esto nos permite, como se aprecia en la Figura 7.9b, predecir como posible último núcleo par ligado al isótopo ^{64}Ca , la cual se aproxima a aquellos resultados mediante métodos más precisos como el método de BCS-resonante [83], la teoría del continuo relativista de Hartree-Bogoliubov [84] o el modelo Bayesiano [59], que lo estiman entre el ^{68}Ca y el ^{72}Ca .



(a) Isótopos desde $A = 42$ hasta $A = 72$.

(b) Isótopos en la zona esperada de la línea de goteo.

Figura 7.9: Energía de ligadura para el Calcio partiendo del carozo ^{40}Ca con los diferentes ajustes de χ .

Por otro lado, utilizando los resultados de la sección 7.3, en conjunto con la ecuación (4.1), obtenemos la energía de ligadura para los isótopos del calcio con A impar. A partir de esta, podemos obtener la energía de separación de un neutrón mediante

$$E_{Bin}(A, Z) = -S_n(A, Z) - |E_{Bin}(A - 1, Z)| \quad (7.7)$$

resultado que presentamos en la Figura 7.10. En dicha imagen, vemos que el núcleo ^{59}Ca resulta ser el último ligado para los isótopos del Calcio con N impar, mismo resultado que obtuvieron Bhattacharya y Gangopadhyay [83] utilizando aproximación resonante de la BCS.

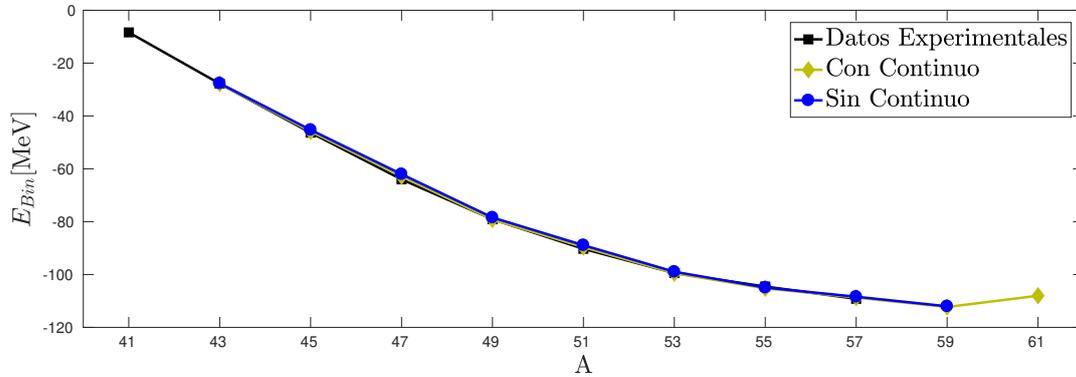


Figura 7.10: Energía de ligadura obtenida para diferentes isótopos impares del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca .

7.5. Energía de separación

Utilizando la definición de S_n dada en 3.6, podemos definir entonces también S_{2n} como

$$S_{2n} = |E_{Bin}(A, Z)| - |E_{Bin}(A - 2, Z)| \quad (7.8)$$

en la cual hemos explicitado los módulos, porque contrario a la definición de los textos de Física Nuclear, hemos tomado la energía de ligadura negativa.

En la Figura 7.11 se observa este resultado con respecto a los datos experimentales, para los resultados ajustados con el mejor χ .

Por otro lado, utilizando los resultados de la sección 7.3, en conjunto con la ecuación (4.1), obtenemos la energía de separación de un neutrón para los isótopos del calcio con A impar, resultado que presentamos en la Figura 7.12.

En ambos casos, vemos que el ajuste respecto a las magnitudes S_n y S_{2n} es significativamente menos preciso que aquel ajuste realizado a las energías de ligadura. Esto se debe a que el χ utilizado fue ajustado respecto a la energía de ligadura en lugar de a P_{exp} , que como vemos en la ecuación (6.26), es la que depende de las energías de separación. Por otro lado, la discrepancia en valores absolutos es similar a la que tenemos en las energías de ligadura, del orden de 1MeV,

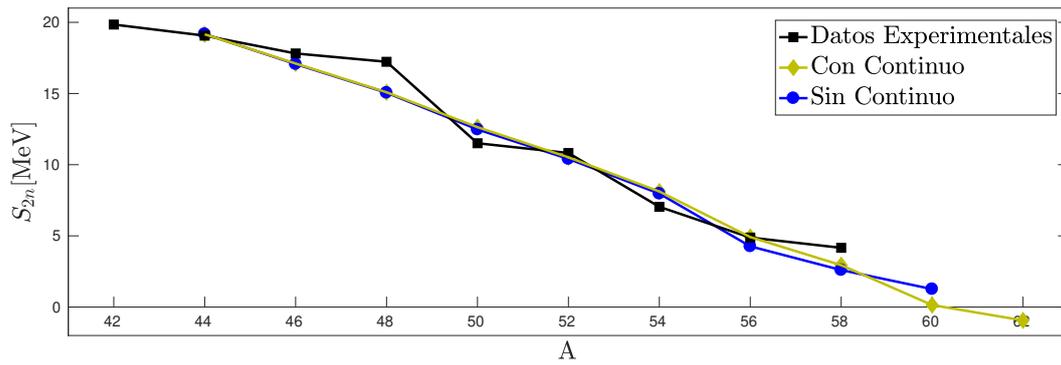


Figura 7.11: Energías de separación de dos neutrones obtenida para diferentes isótopos pares del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca .

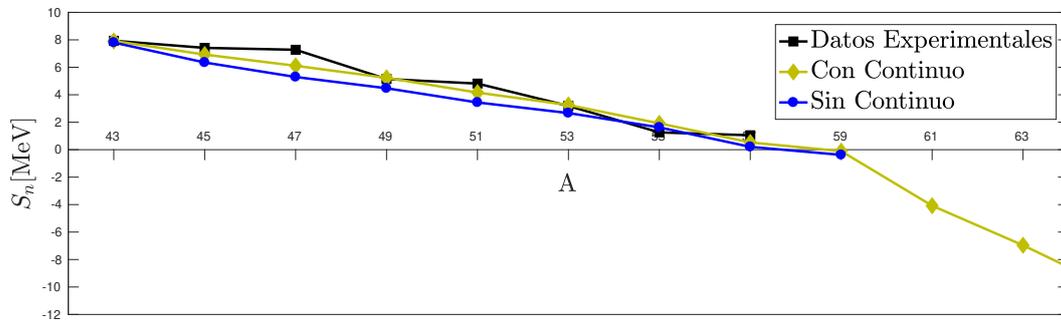


Figura 7.12: Energías de separación de un neutrón obtenida para diferentes isótopos impares del Calcio respecto al núcleo ^{40}Ca .

pero en este caso los errores relativos son mucho más significativos.

Pese a esto, el comportamiento de los valores calculados sigue acompañando a los resultados experimentales. En el caso de la Figura 7.11, el comportamiento es bastante acertado, excepto en el caso del isótopo de capa cerrada ^{48}Ca . Por otro lado, la predicción teórica no reproduce tampoco de forma concisa las fluctuaciones en el valor de S_{2n} . En el caso de la Figura 7.12, el valor de S_n está subestimado, excepto para el isótopo ^{55}Ca , en el cual se sobrestima. Por último, es también más significativo en este caso la diferencia entre el cálculo con continuo que sin él, lo cual podría ser una muestra de que las variables Δ y λ_F se calculan de mejor manera cuando el modelo incluye a las energías del continuo.

Capítulo 8

Carozo ^{48}Ca

Del mismo modo que se procedió en el capítulo anterior, se calculará la energía de ligadura de isótopos del Calcio con A , pero en este caso respecto al núcleo de capa cerrada ^{48}Ca . También, se buscará definir las líneas de goteo, teniendo en cuenta los resultados de este capítulo, como del anterior.

8.1. Ajuste del χ

Para este caso, las energías de ligadura experimentales son respecto a nuestro carozo, el ^{48}Ca . Estas son presentadas en la Tabla 8.1.1 junto con las energías de apareamiento experimentales P_{exp}^1 calculadas mediante la ecuación (6.26).

Núcleo	E_{exp} [MeV]	P_{exp} [MeV]
^{50}Ca	-11,5071	-11,797
^{52}Ca	-22,3269	-10,976
^{54}Ca	-29,3641	-11,158
^{56}Ca	-34,2	-
^{58}Ca	-38,4	-

Tabla 8.1.1: Energías de ligadura experimentales para isótopos del calcio respecto al carozo ^{48}Ca .

Nuevamente, se ajustaron los χ , resultados presentados en la Tabla 8.1.2. Además, se observa

¹ P_{exp} es calculada hasta ^{54}Ca inclusive por la falta de datos experimentales fehacientes de S_n para los núcleos ^{56}Ca y ^{58}Ca .

también en este caso el efecto del continuo en la constante χ , lo cual reafirma nuestra hipótesis de que la presencia del continuo permite a los neutrones no estar tan apareados para lograr formar un núcleo estable.

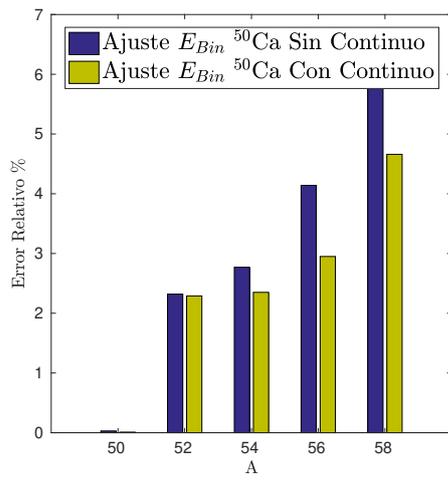
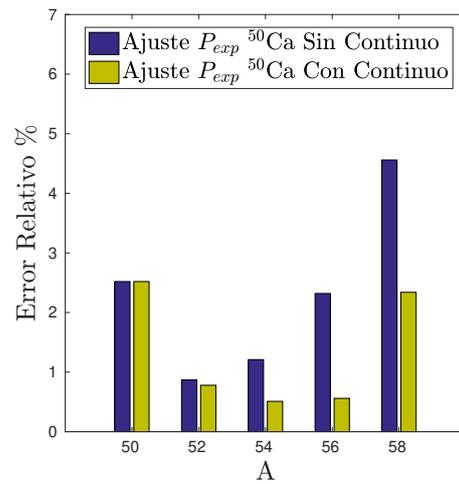
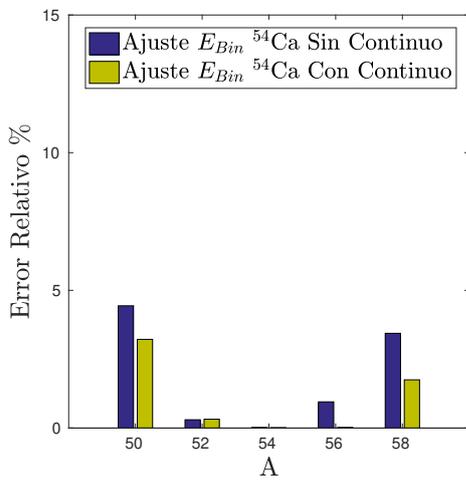
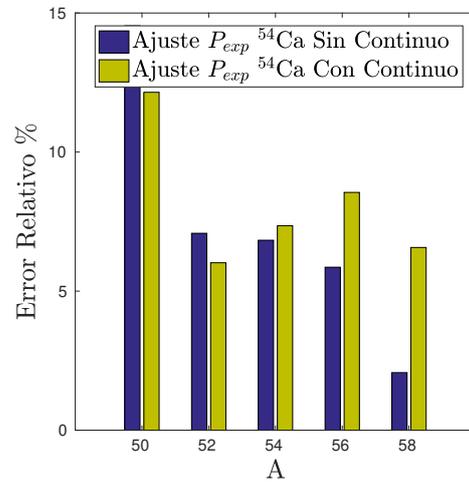
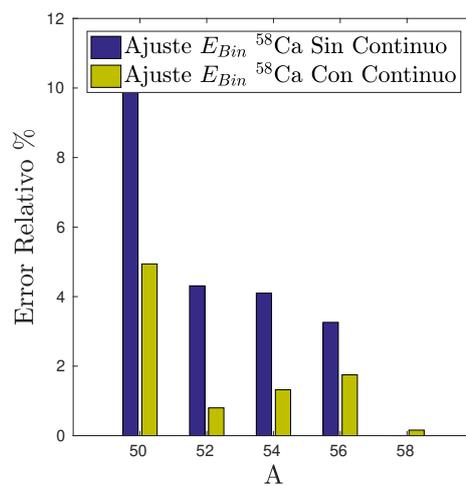
Ajuste al núcleo	Con Continuo		Sin Continuo	
	χ [MeV] Ajustando E_{exp}	χ [MeV] Ajustando P_{exp}	χ [MeV] Ajustando E_{exp}	χ [MeV] Ajustando P_{exp}
^{50}Ca	15,850	17,850	22,750	26,950
^{54}Ca	18,333	23,501	29,943	44,037
^{58}Ca	19,517	—	38,802	—

Tabla 8.1.2: Ajuste de χ a diferentes núcleos mediante distintos métodos.

Representación	Ajuste con	χ	Residuo
Con Continuo	$E_{exp} \ ^{50}\text{Ca}$	15,850	0,9933
	$E_{exp} \ ^{54}\text{Ca}$	18,333	0,1187
	$E_{exp} \ ^{58}\text{Ca}$	19,517	0,1737
	$P_{exp} \ ^{50}\text{Ca}$	17,580	0,1968
	$P_{exp} \ ^{54}\text{Ca}$	23,501	4,6728
Sin Continuo	$E_{exp} \ ^{50}\text{Ca}$	22,750	1,7010
	$E_{exp} \ ^{54}\text{Ca}$	29,943	0,4233
	$E_{exp} \ ^{58}\text{Ca}$	38,802	1,0207
	$P_{exp} \ ^{50}\text{Ca}$	26,950	0,7893
	$P_{exp} \ ^{54}\text{Ca}$	44,037	2,7949

Tabla 8.1.3: Residuos para los distintos χ .

A partir de los datos de la Tabla 8.1.2, se procedió a calcular la energía de ligadura de cada uno de los isótopos pares del calcio, en este caso respecto al carozo ^{48}Ca . En la Figura 8.1 se observa el error relativo de la energía de ligadura calculada respecto a los datos experimentales para distintos ajustes de χ . Al igual que partiendo del carozo ^{40}Ca , no es recomendable ajustar el χ a un núcleo que se encuentre a principio de capa (Figuras 8.1a y 8.1b).

(a) χ ajustado a E_{exp} ^{50}Ca .(b) χ ajustado a P_{exp} ^{50}Ca .(c) χ ajustado a E_{exp} ^{54}Ca .(d) χ ajustado a P_{exp} ^{54}Ca .(e) χ ajustado a E_{exp} ^{58}Ca .Figura 8.1: Error relativo de la energía de ligadura calculada respecto a los datos experimentales para distintos ajustes de χ .

También se repite el hecho respecto al capítulo anterior de que ajustar respecto a la E_{Bin} de un núcleo a mitad de capa (Figura 8.1c) es más preciso. Pero en este, claramente ajustar χ respecto energía de apareamiento (Figura 8.1d) es la peor opción. Finalmente, para el ajuste de χ respecto a la E_{Bin} del núcleo a final de capa (Figura 8.1e), la diferencia entre el modelo con o sin continuo es significativa.

Por otro lado, utilizando nuevamente el método de los residuos, a través de la ecuación (6.27), como vemos en la Tabla 8.1.3, lo ideal es ajustar con núcleos a mitad de capa, para que la descripción de todos los isótopos se ajuste a lo datos experimentales disponibles. Otra conclusión que se vé reafirmada por esta tabla, es el hecho de que la representación que incluye a los estados del continuo afecta significativamente a los resultados, de forma que nos permite acercarnos más a los experimentales. Esto sucede pues incluyendo el continuo, contamos con todas las energías posibles que puede tener un neutrón en un proceso real de dispersión para establecer un núcleo ligado.

8.2. Comportamiento de las energías de Richardson

A comparación de la sección 7.2, el siguiente análisis fue realizado para para el núcleo ^{54}Ca , que consta de 3 pares de neutrones por sobre el carozo ^{48}Ca .

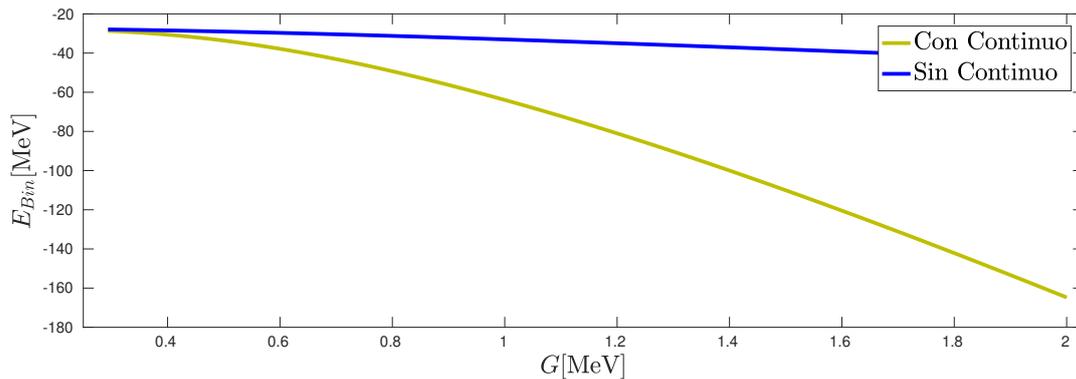


Figura 8.2: Energía de ligadura versus G para el núcleo ^{54}Ca , en las dos representaciones estudiadas.

Otra vez, las diferencias entre las energías de ligadura en la representación con y sin continuo, son completamente diferentes para grandes G , como vemos en la Figura 8.2. Por otro lado, si observamos las Figuras 8.3b y 8.4b, el comportamiento de estas energías de Richardson al acercarse a los polos $2\varepsilon_0 = 2\varepsilon_{2p_{3/2}} = -10,2930\text{MeV}$, con degeneración 4, y

$2\varepsilon_1 = 2\varepsilon_{2p_{1/2}} = -6,2464\text{MeV}$, con degeneración 2, es similar a los observados en la sección 7.2: se acomodan de cierta forma de respetar el movimiento de a pares y la degeneración de los polos.

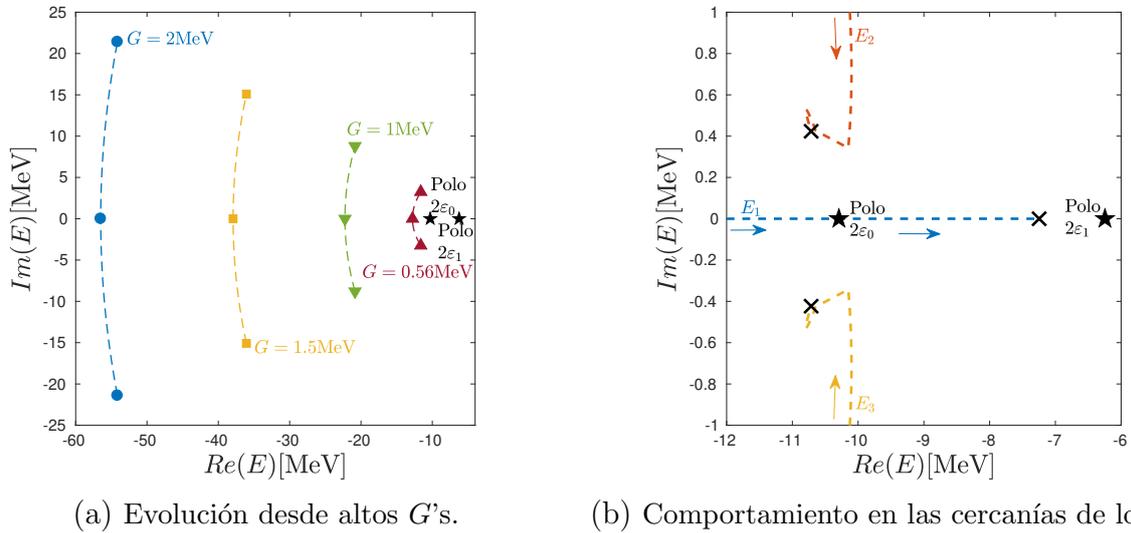


Figura 8.3: Energías de Richardson para el núcleo ^{54}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en un modelo que incluye al continuo.

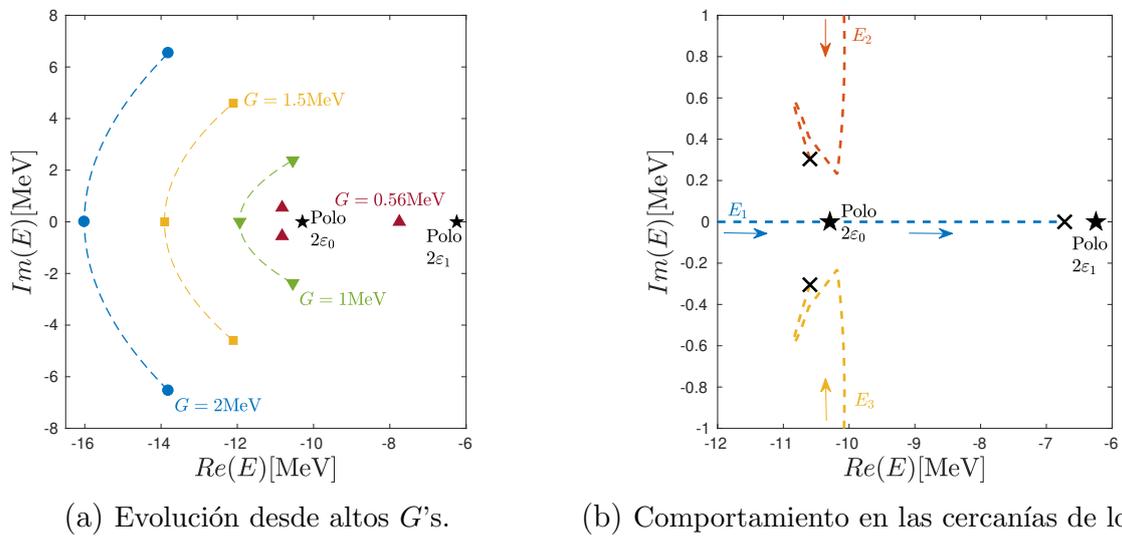


Figura 8.4: Energías de Richardson para el núcleo ^{54}Ca en el plano complejo para diferentes valores de G , en una representación sin el continuo.

Otro dato interesante es que en este caso, en la Figura 8.4a se aprecia que para $G = 1\text{MeV}$ las energías se encontraban en forma de “cluster” alrededor del polo $2\varepsilon_0$, y luego se separan en dos partes para $G = 0,56\text{MeV}$. La inversa de esta representación geométrica, es decir, el paso de un estado con partes separadas a un estado colectivo, es la imagen de la transición de un

sistema normal (partículas independientes) a un sistema superconductor (“cluster” colectivo) en el problema cuántico [80].

8.3. Probabilidad de Ocupación y Número de Partículas

Teniendo en cuenta los resultados de la sección 8.1, todos los resultados presentados aquí son aquellos obtenidos utilizando el modelo que incluye a los estados del continuo y el $\chi = 18,333\text{MeV}$. Si utilizamos nuevamente la ecuación (6.19) para calcular la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple del sistema, las figuras de las “bolitas de probabilidad” son las que se muestran en las Figuras 8.5a y 8.5b, para un núcleo a mitad y otra a final de capa, respectivamente.

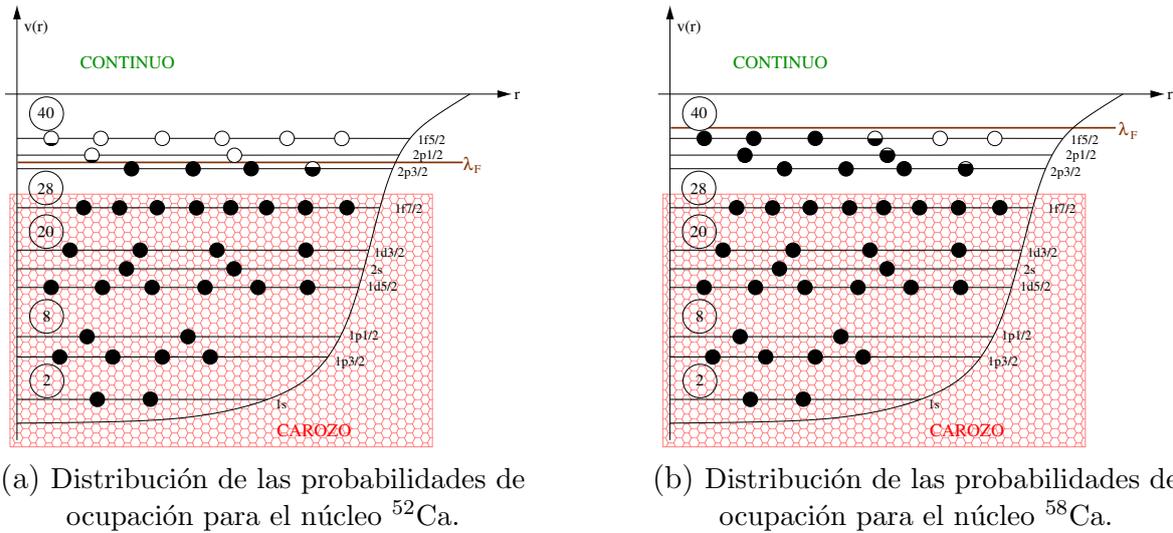


Figura 8.5: Probabilidad de ocupación para dos isótopos del Calcio, respecto al carozo ^{48}Ca . Las esferas representan cuasipartículas con su nivel de ocupación representado por el grado de “llenado” de la esfera.

Los niveles de Fermi que vemos en ambas figuras, ninguno de los cuales se encuentra en el continuo, son presentados junto con los de otros isótopos en la Tabla 8.3.1. También, incluimos el “gap” calculado mediante la ecuación (6.20). En este caso también se ajustó la probabilidad de ocupación de los niveles, como vemos en la Figura 8.6, mediante la ecuación (7.6).

Núcleo	Δ [MeV]	a [MeV] de 7.6	λ_F [MeV]	b [MeV] de 7.6
^{50}Ca	0,5627	0,6717	-5,1667	-5,3145
^{52}Ca	0,4585	0,4179	-4,0469	-4,2310
^{54}Ca	0,6031	0,4699	-2,6051	-2,6507
^{56}Ca	0,7318	0,7013	-1,7731	-2,0421
^{58}Ca	0,6873	0,9426	-1,2920	-1,1949
^{60}Ca	0,4772	1,7592	-	1,7603
^{62}Ca	0,4118	2,1060	-	3,1712
^{64}Ca	0,3608	2,4257	-	4,5794

Tabla 8.3.1: Gap y Nivel de Fermi calculado mediante dos métodos distintos partiendo del carozo ^{48}Ca . Para ^{60}Ca , ^{62}Ca y ^{64}Ca no existen soluciones para la ecuación (6.21) pues en estos casos $N > 10$ y $\lambda_F > 0$.

Los resultados son también explicitados en la Tabla 8.3.1, donde observamos que b tiene el comportamiento del nivel de Fermi λ_F al igual que en el capítulo anterior, y más aún en este caso, el comportamiento de a respeta las variaciones de Δ por lo menos hasta el isótopo ^{58}Ca , el cual se encuentra muy próximo al continuo.

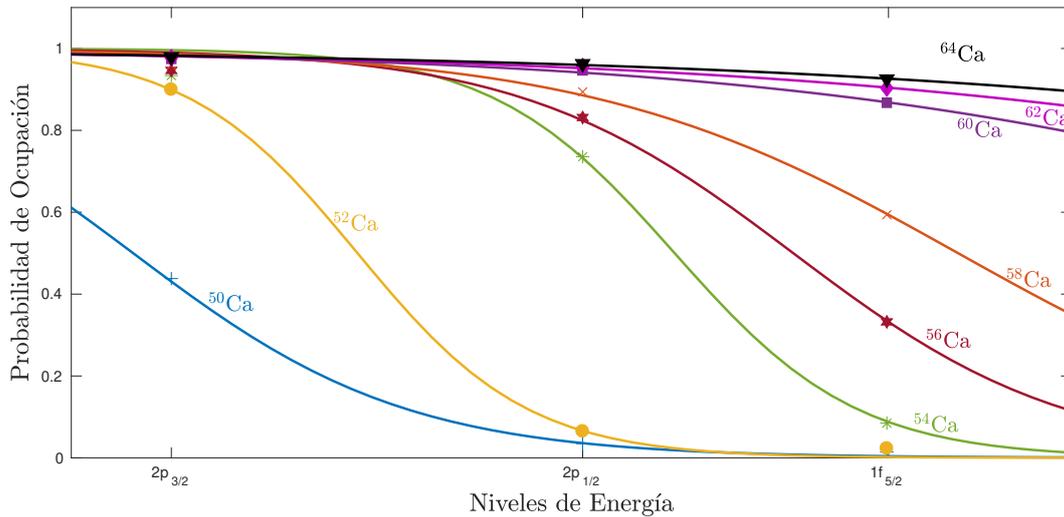


Figura 8.6: Probabilidad de ocupación para isótopos del Calcio ajustadas mediante la ecuación 7.6.

Por otro lado, en la Tabla 8.3.2 observamos el número de partículas en el estado discreto así como aquellas en el continuo, calculado a partir de la ecuación (6.25). El comportamiento también en este caso es el mismo que en el capítulo anterior: mientras que aumenta el número

de partículas en el sistema y el nivel de Fermi se va acercando al continuo, aumenta la ocupación de este. Nuevamente, los isótopos cerca del cierre de cada son aquellos donde las energías del continuo toman mayor importancia, hecho que comprobamos con el aumento de N_{Cont} . Otra característica que se observa, es que mientras $\lambda_F < 0$, ocurrirá que $N_{Cont} < 1$, de forma similar a lo ocurrido en la Tabla 7.3.2 del capítulo anterior.

Núcleo	N_{lig}	N_{cont}	Núcleo	N_{lig}	N_{cont}
^{50}Ca	1,9078	0,0922	^{58}Ca	9,1904	0,8096
^{52}Ca	3,8678	0,1322	^{60}Ca	10,9934	1,0066
^{54}Ca	5,7166	0,2834	^{62}Ca	11,2398	2,7602
^{56}Ca	7,4416	0,5584	^{64}Ca	11,3956	4,6044

Tabla 8.3.2: Número de neutrones en los estados discretos y en el continuo para isótopos del Calcio respecto al carozo ^{48}Ca .

Finalmente, en la Tabla 8.3.3 observamos la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple para tres núcleos representativos, en los dos modelos utilizados, de la misma manera que en el capítulo anterior. Nuevamente, apreciamos que el llenado de los niveles se da con mayor velocidad cuando la representación no incluye a los estados del continuo, lo cual entendemos que se debe a que los únicos estados disponibles en dicha representación son los de partícula simple.

Niveles	^{50}Ca		^{54}Ca		^{60}Ca	
	Con Continuo	Sin Continuo	Con Continuo	Sin Continuo	Con Continuo	Sin Continuo
$2p_{3/2}$	0,4379	0,4532	0,9340	0,9571	0,9744	0,9980
$2p_{1/2}$	0,0349	0,0406	0,7359	0,8151	0,9463	0,9980
$1f_{5/2}$	0,0144	0,0171	0,0849	0,0884	0,8672	0,9980

Tabla 8.3.3: Probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple de los isótopos ^{50}Ca , ^{54}Ca y ^{60}Ca respecto al carozo ^{48}Ca .

8.4. Energía de ligadura

Teniendo en cuenta los resultados de la sección 8.1, presentamos en la Figura 8.7 la energía de ligadura de los diferentes isótopos del Calcio con número de neutrones pares. Como en el capítulo anterior, incluir estados del continuo nos permite ir más allá del ^{60}Ca buscando adentrarnos en la línea de goteo, y el ajuste a los datos experimentales mejora.

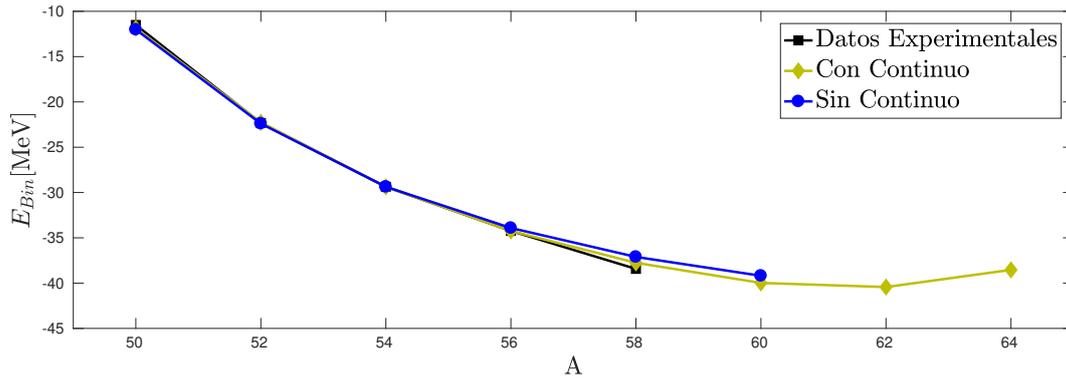
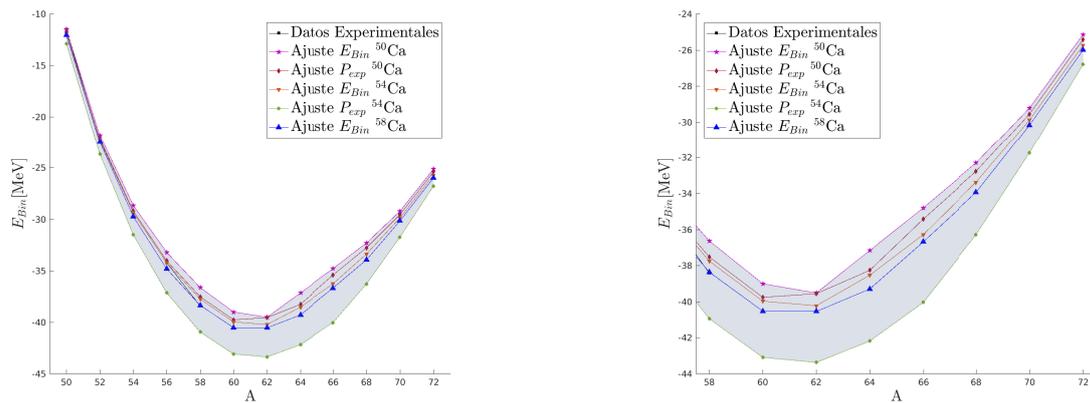


Figura 8.7: Energías de ligadura obtenida para diferentes isótopos del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca .

Nuevamente, para identificar la línea de goteo, teniendo en cuenta nuestra variedad de ajustes de la constante χ , observamos en la Figura 8.8 el área de posibles resultados de la energía de ligadura. Esto nos permite, partiendo del carozo ^{48}Ca , estimar como último núcleo ligado con N par al ^{66}Ca , en concordancia con lo obtenido en el capítulo anterior.



(a) Isótopos desde $A = 50$ hasta $A = 72$.

(b) Isótopos en la zona de la línea de goteo.

Figura 8.8: Energía de ligadura para el Calcio partiendo del carozo ^{48}Ca con los diferentes ajustes de χ .

En cambio, si ahora tomamos todo en juego, es decir, los resultados partiendo del carozo 40 y los resultados partiendo del carozo ^{48}Ca , con todos los χ distintos involucrados, obtenemos

la Figura 8.9. A través de ella, podemos predecir al núcleo ^{68}Ca como el último isótopo del Calcio que se encontrará ligado con N par. Recordemos que en el paper [59] de este año de Nazarewicz, *et al*, afirmaban que el núcleo ^{68}Ca es ligado con un 76% de probabilidad.

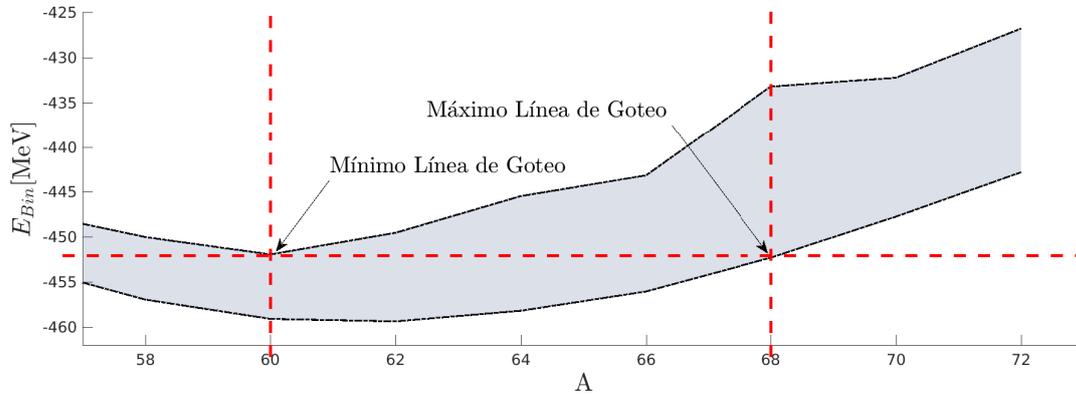


Figura 8.9: Extremos de la línea de goteo, independizándonos del modelo.

Por otro lado, utilizando los resultados de la sección 8.3, en conjunto con la ecuación (4.1), obtenemos la energía de separación de un neutrón para los isótopos del calcio con A impar, mediante la cual obtenemos la energía de ligadura definida en la ecuación (7.7), resultado que presentamos en la Figura 8.10. Si comparamos con el resultado partiendo del carozo ^{40}Ca , existe una coincidencia al establecer al isótopo ^{59}Ca como el último ligado.

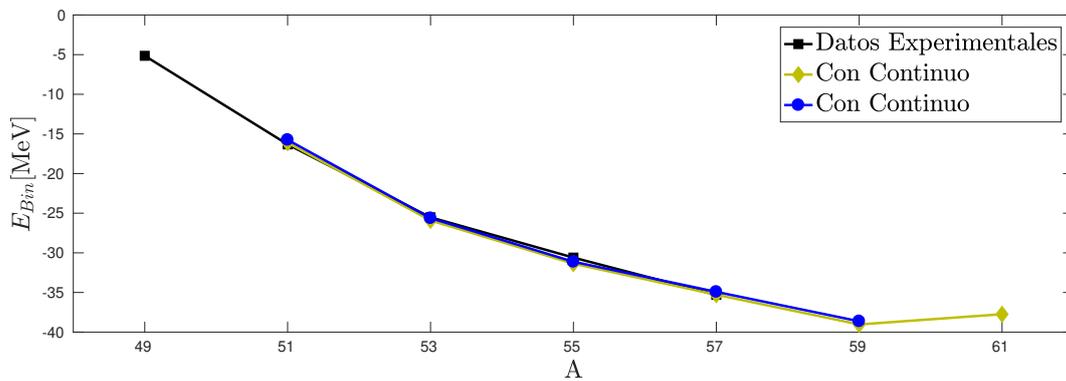


Figura 8.10: Energía de ligadura obtenida para diferentes isótopos impares del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca .

8.5. Energía de separación

Utilizando la ecuación (7.8), en la Figura 8.11 presentamos este resultado con respecto a los datos experimentales, para los resultados ajustados con el mejor χ .

Por otro lado, utilizando los resultados de la sección 8.3, en conjunto con la ecuación (4.1), obtenemos la energía de separación de un neutrón para los isótopos del calcio con A impar, resultado que presentamos en la Figura 8.12.

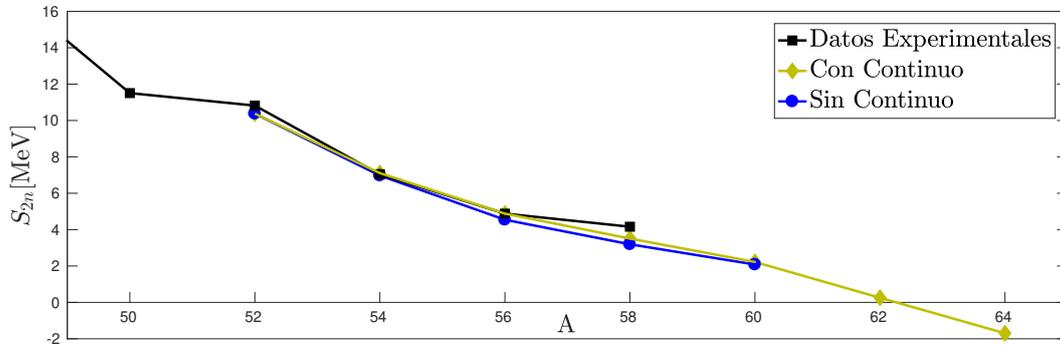


Figura 8.11: Energías de separación de dos neutrón obtenida para diferentes isótopos pares del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca .

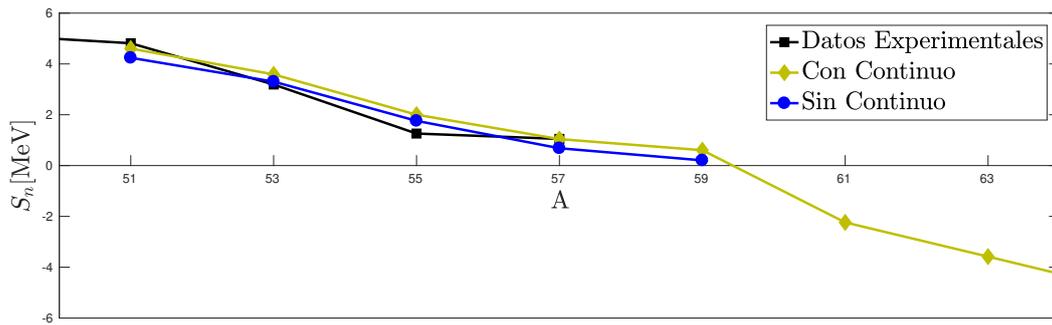


Figura 8.12: Energías de separación de un neutrón obtenida para diferentes isótopos del Calcio respecto al núcleo ^{48}Ca .

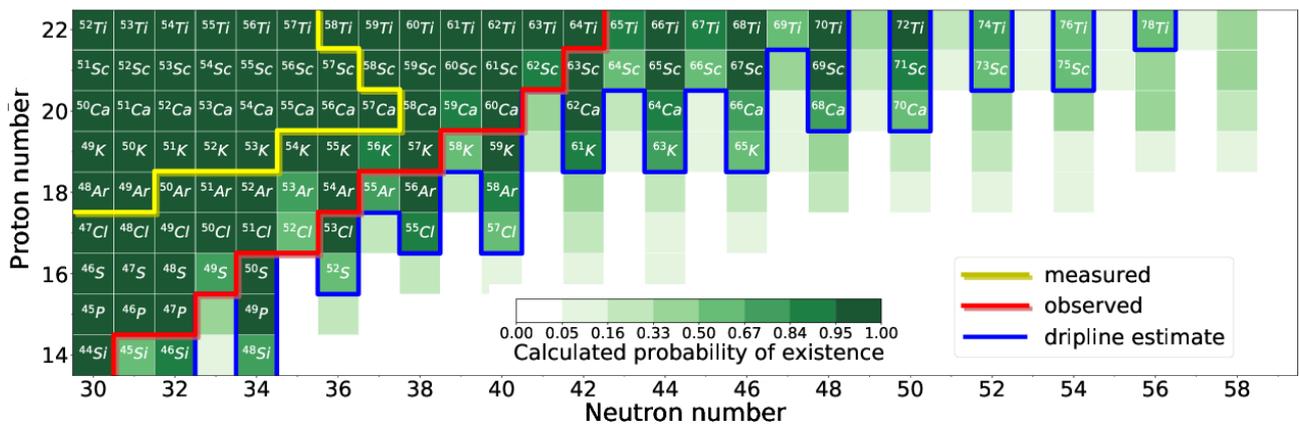


Figura 8.13: Tabla de nucleidos en la zona del Calcio, donde se observa la línea de goteo estimada junto con la probabilidad de existencia. Fuente: Neutron drip line in the Ca region from Bayesian model averaging - Nazarewicz [59].

A comparación del capítulo anterior, en este caso vemos en las Figuras 8.11 y 8.12 que el ajuste respecto a las magnitudes S_n y S_{2n} experimentales es preciso, con un comportamiento de los valores calculados muy cercano al experimental.

Capítulo 9

Conclusión

Este trabajo final comenzó con una breve descripción de la historia de la Física Nuclear, de manera tal a tener un contexto de trabajo. A día de hoy, uno de los temas más estudiados dentro de la física nuclear es la estructura de los núcleos, principalmente en las cercanías de la línea de goteo. Para comprender primeramente la estructura nuclear, en el Capítulo 3 se presentaron los distintos modelos que describen el comportamiento de un núcleo atómico. Haciendo uso de estos, particularmente del modelo de capas, se describieron con éxito dos núcleos importantes para los cálculos subsiguientes: el ^{41}Ca , modelizado como un neutrón en el potencial generado por el carozo ^{40}Ca compuesto por 20 neutrones y 20 protones, y el ^{49}Ca , modelizado como un neutrón, pero en este caso sobre el carozo ^{28}Ca de 28 neutrones y 20 protones.

Con esta base, primeramente en el Capítulo 4, el enfoque fue describir de la mejor manera posible la línea de goteo, y en particular la que corresponde a nucleidos ricos en neutrones, nuestro caso de estudio. En él concluimos que los estados resonantes o no ligados, son importantes a la hora de establecer la línea de goteo. Por ello, en el Capítulo 5, se presentó la teoría que enmarca a estos estados dentro de un mismo conjunto: el continuo. Mediante los estados de energía compleja, identificamos las contribuciones de las diferentes ondas parciales a la densidad total. Descrita la densidad de estados $g(\varepsilon)$ y su relación con el desfase δ propio de la teoría de dispersión, pudimos aplicar toda la maquinaria teórica a aquellos núcleos reales caracterizados en el Capítulo 3. Obtuvimos entonces, dos densidades de estados del continuo, una para cada núcleo, a través de las cuales, buscamos expandir los sistemas nucleares hasta el punto de la línea de goteo.

Recordemos que este trabajo buscaba, además de determinar la línea de goteo, determinar

la energía de ligadura de todos los isótopos del Calcio mediante el modelo de Richardson. Es por esto, que fue imprescindible desarrollar la teoría que necesita el modelo. En el Capítulo 6, presentamos la teoría de la superconductividad y cómo a partir de ella entendemos el apareamiento de nucleones en el núcleo. Definidas ciertas herramientas de la mecánica cuántica, se pudo describir tanto el modelo de Richardson, como el modelo que finalmente utilizamos en este trabajo: Richardson más continuo y ciertos “extras” tomados de la teoría de Bardeen, Cooper y Shrieffer. Con estos parámetros, calculamos varios observables, como las energías de separación de uno y dos neutrones, además de la energía de ligadura.

Con este “background” teórico estuvimos en posición de desarrollar los cálculos para describir a los isótopos del Calcio ricos en neutrones. Primeramente, partimos en el Capítulo 7 desde el carozo doblemente mágico ^{40}Ca , y luego en el Capítulo 8, se partió desde el carozo, también doblemente mágico, ^{48}Ca , cuyos estados se encuentran a su vez más cerca del continuo.

En ambos caso, se procedió en primera instancia a ajustar el parámetro χ de la ecuación (6.16) a través de distintos métodos. Esto permitió generar un espectro de modelos muy variado. Gracias a ello, pudimos concluir que si uno busca ajustar, de la mejor manera posible, la energía de ligadura E_{Bin} calculada teóricamente a los datos experimentales de todos los isótopos del Calcio ricos en neutrones, lo recomendable es tomar un χ que haya sido previamente ajustado a un núcleo a mitad de capa. Posiblemente esto sea así porque a la mitad de la capa es donde el apareamiento entre neutrones es mayor.

Por otro lado, el comportamiento de las energías de Richardson es tal cual se estipulaba cuando en el Apéndice A.2 se describió el mapeo electrostático del modelo. Además, se observó, particularmente en la sección 8.2, la transición desde un sistema de partículas independientes a un sistema en forma de “cluster” en función del valor de la constante de apareamiento G .

De las secciones 7.3 y 8.3, son muchas las conclusiones que podemos realizar. Primeramente, los resultados de estas secciones son puramente en base a las probabilidades de ocupación de partícula simple. Esto es importante resaltarlo, pues calculando a través de la ecuación (6.19) estas probabilidades, fuimos capaces de obtener el “gap” Δ y el nivel de Fermi λ_F de cada isótopo con N par, lo cual nos permitió obtener la energía de ligadura de los isótopos con N impar, a través de las ecuaciones (4.1) y (3.6). Además, haciendo uso del conocimiento en cuanto al comportamiento de la probabilidad de ocupación de los niveles de partícula simple, se decidió ajustar estos datos mediante la estadística de Fermi, estableciéndose en base a esto,

otra posible manera de obtener los niveles de Fermi λ_F de cada isótopo con A par, y dejando la posibilidad de incluir la probabilidad de ocupación en el continuo, de manera que también se pueda obtener Δ con mayor precisión.

Finalmente, gracias a todos los resultados previos recientemente analizados, fuimos capaces de establecer la línea de goteo de neutrones de los isótopos pares e impares del Calcio. La conclusión más importante, se desprende de los resultados presentados en la sección 8.4, particularmente de la Figura 8.9. La variedad de ajustes sobre χ , nos permitió predecir al isótopo ^{68}Ca como el último ligado con número de neutrones par, resultado que se corresponde con aquellos obtenidos a través de modelos más sofisticados (Ref. [59]). Por otra parte, para el caso de la línea de goteo de neutrones para los isótopos impares del Calcio, no existe diferencias entre los resultados del Capítulo 7 y del Capítulo 8: ambas modelizaciones establecen como último núcleo ligado al ^{59}Ca . Este resultado es completamente gratificante, pues se corresponde con una variedad de modelos [59, 83, 84].

Por otro lado, nos permitimos afirmar que el modelo aplicado en este trabajo, con sus simplificaciones como tomar constante a la interacción de apareamiento, o descartar cualquier tipo de interacción entre pares o modificación en la energía de los niveles de partícula simple a medida que incorporo pares, entrega soluciones que se encuentran a la altura de métodos mucho más modernos y sofisticados en cuanto a la matemática. Esto no implica que no existan mejoras a realizar, como por ejemplo: incluir la probabilidad de ocupación de estados del continuo, incluir correcciones sobre los niveles de partícula simple a medida que aumenta N , como puede ser también al ajuste de la constante χ a cada uno de los isótopos estudiados que tengan resultados experimentales.

Como cierre, nos gustaría destacar como resultado más importante, a la predicción de los núcleos ^{68}Ca y ^{59}Ca como los últimos isótopos del Calcio ligados, contorno que delimitaría la línea de goteo.

Apéndice A

Soluciones de Richardson

A.1. Hamiltoniano de apareamiento y su solución exacta

Comenzamos el desarrollo de la solución exacta de Richardson[5, 6] a los autovalores del Hamiltoniano de apareamiento siguiendo la publicación científica presentada por von Delft y Braun [77] en 1999, aplicado en este caso al apareamiento de nucleones en el núcleo.

El Hamiltoniano de apareamiento más general puede ser escrito en segunda cuantización como

$$H = \sum_{j\sigma} \varepsilon_j a_{j\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + \sum_{ij} V_{ij} a_{i+}^\dagger a_{i-}^\dagger a_{j+} a_{j-} \quad (\text{A.1})$$

La aproximación que tomamos entonces es reemplazar los coeficientes de apareamiento V_{ij} por una única constante G , dando origen a

$$H = \sum_{j\sigma} \varepsilon_j a_{j\sigma}^\dagger a_{j\sigma} - G \sum_{ij} a_{i+}^\dagger a_{i-}^\dagger a_{j+} a_{j-} \quad (\text{A.2})$$

donde el signo $-$ representa que la interacción es atractiva. Este Hamiltoniano corresponde a un conjunto S de N_s pares de estados $|j, \pm\rangle$ inversos temporales etiquetados con un índice discreto $j = 1, \dots, N_s$ con energías ε_j y acople

$$G = \frac{\chi}{A} \quad (\text{A.3})$$

donde la constante χ es ajustada a datos experimentales de un dado isótopo.

Primeramente notemos que los niveles de ocupación simple no participan en la dispersión

de pares descrita por H , y por el principio de exclusión de Pauli permanecen bloqueados para dicha dispersión; las etiquetas de dichos niveles son entonces buenos número cuánticos. Un autoestado general de H tiene entonces la forma

$$|n, B\rangle = \prod_{i \in B} c_{i\sigma}^\dagger |\Psi_n\rangle_U \quad (\text{A.4})$$

$$\text{donde } |\Psi_n\rangle_U = \sum_{j_1, \dots, j_n}^U \varphi(j_1, \dots, j_n) \prod_{\nu=1}^n b_{j_\nu=1}^\dagger |0\rangle \quad (\text{A.5})$$

Esto describe a $N = 2n + b$ neutrones o protones, donde b pertenecen al conjunto B de niveles bloqueados de ocupación simple, contribuyendo con autovalores $\mathcal{E}_B = \sum_{i \in B} \varepsilon_i$, mientras que los restantes n pares, creados por el operador de pares $b_j^\dagger = a_{j+}^\dagger a_{j-}^\dagger$, están en el conjunto $U = S/B$, es decir, aquellos que están en S pero no en B , de $N_u = N_s - b$ niveles desbloqueados, cuya función de onda es $\varphi(j_1, \dots, j_n)$. La dinámica de estos pares está gobernada por

$$H_U = \sum_{ij}^U (2\varepsilon_j \delta_{ij} - g) b_i^\dagger b_j \quad (\text{A.6})$$

y escribiendo la autoenergía de $|n, b\rangle$ como $\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_b$, el estado $|\Psi_n\rangle_U$ satisface

$$H_U |\Psi_n\rangle_U = \mathcal{E}_n |\Psi_n\rangle_U, \quad \sum_j^U b_j^\dagger b_j |\Psi_n\rangle_U = n |\Psi_n\rangle_U \quad (\text{A.7})$$

Diagonalizar H_U sería trivial si los b fueran operadores de bosones verdaderos. En cambio, como no lo son, en el subespacio expandido por el conjunto U de niveles de ocupación no simple, satisfacen las relaciones de los llamados bosones “hard-cores”

$$\left(b_j^\dagger\right)^2 = 0, \quad [b_j, b_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}(1 - 2b_j^\dagger b_j), \quad [b_j^\dagger b_j, b_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'} b_j^\dagger \quad (\text{A.8})$$

las cuales reflejan el principio de exclusión de Pauli para fermiones. Notemos que $\left(b_j^\dagger\right)^2 = 0$ implica que, por el principio de exclusión, no podría crear dos pares en un mismo estado j , y como consecuencia, solo aquellos término con todos los j_i distintos serán no nulos en (A.5).

Para encontrar la solución exacta al hamiltoniano H_U , en lugar de seguir el desarrollo original de Richardson[4, 5, 6], utilizaremos uno alternativo más corto, también propuesto por él [85], primero consideraremos el caso más simple de bosones reales y escribiremos la forma genérica

de sus autoestados. Luego explicaremos porque esta forma falla para reproducir autoestados de bosones “hard-core”. Finalmente, identificada la razón del fallo, mostraremos que unicamente una generalización es necesaria para reparar este fallo y obtener los autoestados de bosones “hard-core”.

Sea \tilde{b}_j el operador de bosones reales (es decir, $[\tilde{b}_j, \tilde{b}_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}$), gobernado el sistema por el Hamiltoniano \tilde{H}_U de la forma de la ecuación (A.6), con $b_j \rightarrow \tilde{b}_j$. Para encontrar la solución, reescribamos \tilde{H}_U como

$$\tilde{H}_U = \sum_J \tilde{E}_J \tilde{B}_J^\dagger \tilde{B}_J + cte \quad (\text{A.9})$$

donde los nuevos operadores \tilde{B} (con constantes de normalización C_J) están dados por

$$\tilde{B}_J^\dagger = GC_J \sum_j^U \frac{\tilde{b}_j^\dagger}{2\varepsilon_j - \tilde{E}_J}, \quad \frac{1}{(GC_J)^2} = \sum_j^U \frac{1}{(2\varepsilon_j - \tilde{E}_J)^2} \quad (\text{A.10})$$

y las autoenergías bosónicas \tilde{E}_J son las raíces de la ecuación de autovalores

$$1 - \sum_j^U \frac{G}{2\varepsilon_j - \tilde{E}_J} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Esta es una ecuación de orden N_u en \tilde{E}_J . Posee entonces N_u raíces, por lo que la etiqueta J va de 1 a N_u . Cuando $G = 0$, \tilde{E}_J evoluciona suavemente a una de las autoenergías ε_j de partícula simple. Un estado general de n bosones y su autoenergía tienen la forma

$$|\tilde{\Phi}_n\rangle_U = \prod_{\nu=1}^n \tilde{B}_{J_\nu}^\dagger |0\rangle, \quad \tilde{\mathcal{E}}_n = \sum_{\nu=1}^n \tilde{E}_{J_\nu} \quad (\text{A.12})$$

donde J_1, \dots, J_n no necesitan ser todos distintos, ya que trabajamos con bosones reales.

Partiendo del hecho de que existe una diferencia solamente en los b_j , para los bosones “hard-core”, tomamos un Ansatz para $|\Phi_n\rangle_U$ similar a la ecuación (A.12) (pero eliminando las constantes de normalización y tomando los J_ν todos distintos)

$$|\Phi_n\rangle_U = \prod_{\nu=1}^n B_{J_\nu}^\dagger |0\rangle, \quad \text{con } B_J^\dagger = \sum_j^U \frac{b_j^\dagger}{2\varepsilon_j - E_J} \quad (\text{A.13})$$

donde ahora nos queda ver bajo que condiciones $(H_U - \mathcal{E}_n) |\Phi_n\rangle_U$ es cero, es decir, cuales son

los autoestados de H_U .

Utilizando relaciones de conmutación, junto con el hecho de que $H_U|0\rangle = 0$ y $\mathcal{E}_n = \sum_{\nu}^n E_{J_{\nu}}$, encontramos que

$$\begin{aligned}
 H_U|\Psi_n\rangle_U &= \mathcal{E}_n|\Psi_n\rangle_U + \sum_{\nu=1}^n \left[1 - \frac{G}{2\varepsilon_j - E_{J_{\nu}}} \right] B_0^\dagger \left(\prod_{\eta=1(\neq\nu)}^n B_{J_{\eta}}^\dagger \right) |0\rangle \\
 &+ \sum_{\nu=1}^n \left\{ \left(\prod_{\eta=1}^{\nu-1} B_{J_{\eta}}^\dagger \right) \left[\sum_j^U \frac{2GB_0^\dagger b_j^\dagger b_j}{2\varepsilon_j - E_{J_{\nu}}} \right] \left(\prod_{\mu=\nu+1}^n B_{J_{\mu}}^\dagger \right) \right\} |0\rangle
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Supongamos ahora que hacemos el mismo cálculo para bosones reales en lugar de bosones “hard-core”. Entonces, el segundo renglón de la ecuación (A.14) estaría ausente y el primer renglón implicaría que $(\tilde{H}_U - \tilde{\mathcal{E}}_n)|\tilde{\Phi}_n\rangle_U = 0$ pues el término $1 - \frac{G}{2\varepsilon_j - \tilde{E}_{J_{\nu}}}$ se anularía en base a la ecuación (A.11). En otras palabras, verificamos explícitamente que los estados de bosones verdaderos de la forma (A.12) son autoestados de \tilde{H}_U , con \tilde{E}_J que satisfacen la ecuación (A.11). Más aún, identificamos que el término en el segundo renglón de la ecuación (A.14) es una complicación extra que genera el hecho de trabajar con bosones “hard-core”.

Afortunadamente, esta complicación extra es tratable: primero notemos el siguiente conmutador

$$\left[\sum_j^U \frac{2GB_0^\dagger b_j^\dagger b_j}{2\varepsilon_j - E_{J_{\nu}}}, B_{J_{\mu}}^\dagger \right] = \sum_j^U \frac{2GB_0^\dagger}{2\varepsilon_j - E_{J_{\nu}}} \frac{b_j^\dagger}{2\varepsilon_j - E_{J_{\mu}}} = 2GB_0^\dagger \frac{B_{J_{\nu}}^\dagger - B_{J_{\mu}}^\dagger}{E_{J_{\nu}} - E_{J_{\mu}}} \tag{A.15}$$

donde vemos que la última igualdad contiene operadores B^\dagger y no más $b_j^\dagger b_j$. Esto nos permite eliminar los $b_j^\dagger b_j$ del segundo renglón de la ecuación (A.14), reescribiendolo como

$$\sum_{\nu=1}^n \left[\sum_{\mu=1(\neq\nu)}^n \frac{2G}{E_{J_{\mu}} - E_{J_{\nu}}} \right] B_0^\dagger \left(\prod_{\eta=1(\neq\nu)}^n B_{J_{\eta}}^\dagger \right) |0\rangle \tag{A.16}$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (A.14) y agrupando términos, concluimos que $(H_U - \mathcal{E}_n)|\Phi_n\rangle_U$ es cero si las energías son las soluciones de

$$1 - \sum_j^U \frac{G}{2\varepsilon_j - E_{J_{\nu}}} + \sum_{\mu=1(\neq\nu)}^n \frac{2G}{E_{J_{\mu}} - E_{J_{\nu}}} = 0, \quad \text{para } \nu = 1, \dots, n \tag{A.17}$$

Estas constituyen un sistema de n ecuaciones acopladas (recordemos que n es el número de

pares) para las energías E_{J_1}, \dots, E_{J_n} .

A.2. Mapeo electroestático de las soluciones

Para probar que la solución exacta al Hamiltoniano de apareamiento dada en la ecuación (A.17) coincidía con la aproximación de la BCS en el límite de N grande, Richardson y Gaudin utilizaron un mapeo electroestático como analogía [79, 80]. Asumieron que tenían un sistema clásico de dos dimensiones compuesto de un conjunto de M cargas puntuales libres y otro conjunto de L cargas puntuales fijas. Llamaron a las cargas fijas orbitones y a las libres pariones.

El potencial de Coulomb debido a la presencia de una carga unitaria en el origen está dado por la solución de la ecuación de Poisson[86]

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -2\pi\delta(\vec{r}) \quad (\text{A.18})$$

El potencial de Coulomb $V(\vec{r})$ que satisface esta ecuación depende de la dimensión del sistema. Para una, dos o tres dimensiones, las soluciones son

$$V(\vec{r}) \sim \begin{cases} r, & 1D \\ \ln(r), & 2D \\ 1/r, & 3D \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

En el caso de ellos, utilizaron la estructura matemática del problema idealizado en 2D para obtener datos útiles para la física del problema de apareamiento cuántico de muchos cuerpos.

Para esto, mapearon el plano xy en el plano complejo asignando a cada punto \vec{r} un número complejo $z = x + iy$. Asumieron que los pariones tienen carga q_α y posición z_α , con $\alpha = 1, \dots, M$, y que los orbitones tienen carga q_i y posición z_i , con $i = 1, \dots, L$. Como están confinados a un espacio 2D, todas las cargas interactúan entre sí a través de un potencial logarítmico. Además, pensemos que hay un campo eléctrico uniforme externo de intensidad E_0 y apuntando en la

dirección del eje real. La energía electrostática de este sistema es entonces

$$\begin{aligned}
 U = & E_0 \sum_{\alpha=1}^M q_{\alpha} \Re(z_{\alpha}) + E_0 \sum_{j=1}^L q_j \Re(z_j) - \sum_{j=1}^L \sum_{\alpha=1}^M q_{\alpha} q_j \ln |z_i - z_{\alpha}| \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha} q_{\beta} \ln |z_{\alpha} - z_{\beta}| - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i q_j \ln |z_i - z_j|
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Buscamos entonces las posiciones de equilibrio de los pariones libres en presencia de los orbitones fijos, obteniendo la condición

$$E_0 + \sum_j \frac{q_j}{z_j - z_{\alpha}} - \sum_{\beta(\neq \alpha)} \frac{q_{\beta}}{z_{\alpha} - z_{\beta}} = 0 \tag{A.21}$$

A partir de lo presentado anteriormente, concluyeron que resolver las ecuaciones de Richardson para las energías de pares $E_{J_{\nu}}$ es completamente equivalente a buscar las soluciones estacionarias para las posiciones de los pariones en el problema electrostático en 2D, siendo $z_j \equiv 2\varepsilon_j$, $q_{\alpha} \equiv 1$, $z_{\alpha} \equiv E_{J_{\nu}}$, $q_i \equiv d_i$ (degeneración de niveles) y $E_0 \equiv 1/4G$. El número de pariones alrededor de un orbitón i no puede exceder a $|2d_i|$, como requiere el principio de Pauli, es decir, no podemos acomodar en un nivel de partícula simple mas partículas que las que permite su degeneración. La configuración del estado fundamental corresponde entonces con distribuciones de pariones alrededor de los orbitones de manera consistente con el principio de exclusión.

Bibliografía

- [1] Samuel S. M. Wong. *Introductory Nuclear Physics*. Wiley-VCH, 1998.
- [2] Walter Greiner, Joachim A. Maruhn, and D.A. Bromley. *Nuclear Models*. Springer-Verlag Germany, 1996.
- [3] Kris L. G. Heyde. *The Nuclear Shell Model*. Springer-Verlag Germany, 1994.
- [4] R.W. Richardson. Application to the exact theory of the pairing model to some even isotopes of lead. *Physics Letters*, 5(1):82 – 84, 1963.
- [5] R. W. Richardson. A restricted class of exact eigenstates of the pairing-force hamiltonian. *Physical Review Letters*, 3(6):68–72, 1963.
- [6] R. W. Richardson and N. Sherman. Exact eigenstates of the pairing-force Hamiltonian. *Nuclear Physics*, 52:221–238, 1964.
- [7] Noboru Takigawa and Kouhei Washiyama. *Fundamentals of Nuclear Physics*. Springer Japan, 2017.
- [8] I. Tanihata, H. Hamagaki, O. Hashimoto, Y. Shida, N. Yoshikawa, K. Sugimoto, et al. Measurements of interaction cross sections and nuclear radii in the light p -shell region. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2676–2679, Dec 1985.
- [9] D. A. Cottingham, W. N.; Greenwood. *An Introduction to Nuclear Physics*. Cambridge University Press, 2011.
- [10] Charles Kittel. *Introduction to solid state physics*. Wiley-Interscience, 1996.
- [11] N. Bohr Dr. phil. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(151):1–25, 1913.
- [12] J. Chadwick. The Existence of a Neutron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 136(830):692–708, 1932.
- [13] Hideki Yukawa. On the Interaction of Elementary Particles. I. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 1:1–10, 1935.
- [14] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, 73:803–804, Apr 1948.
- [15] E. Gapon and D. Iwanenko. Zur bestimmung der isotopenzahl. *Naturwissenschaften*, 20:792–793, Oct 1932.
- [16] Aage Bohr and Ben R. Mottelson. *Nuclear Structure*, volume 1. World Scientific, 1998.
- [17] Aage Bohr and Ben R. Mottelson. *Nuclear Structure*, volume 2. World Scientific, 1998.

- [18] Kris L. G. Heyde. *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*. Institute of Physics, 2004.
- [19] Meng Wang, G. Audi, F. G. Kondev, W. J. Huang, S. Naimi, and Xing Xu. The Ame2016 atomic mass evaluation - (II). Tables, graphs and references. *Chinese Physics C*, 41(3), 2017.
- [20] Jean-Louis Basdevant, James Rich, and Michael Spiro. *Fundamentals in nuclear physics: From nuclear structure to cosmology*. Springer, oct 2005.
- [21] A. H. Wapstra. *Atomic Masses of Nuclides*, pages 1–37. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1958.
- [22] Jochen Erler, Noah Birge, Markus Kortelainen, Witold Nazarewicz, Erik Olsen, Alexander M. Perhac, and Mario Stoitsov. The limits of the nuclear landscape. *Nature*, 486(7404):509–512, 2012.
- [23] K. P. Pathria and Paul D. Beale. *Statistical mechanics*. Elsevier, 3 edition, 2011.
- [24] Bogdan Povh, Klaus Rith, Christoph Scholz, Frank Zetsche, and Martin Lavelle. *Particles and Nuclei. An introduction to the Physical Concepts*. Springer, 2008.
- [25] Saverio D’Auria. *Introduction to Nuclear and Particle Physics*. Springer, 2018.
- [26] Jouni Suhonen. *From Nucleons to Nucleus*. Springer, 2007.
- [27] Roger D. Woods and David S. Saxon. Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering. *Phys. Rev.*, 95:577–578, Jul 1954.
- [28] T. Vertse, K. F. Pál, and Z. Balogh. Gamow, a program for calculating the resonant state solution of the radial Schrödinger equation in an arbitrary optical potential. *Computer Physics Communications*, 27(3):309–322, 1982.
- [29] L. Gr Ixaru, M. Rizea, and T. Vertse. Piecewise perturbation methods for calculating eigensolutions of a complex optical potential. *Computer Physics Communications*, 85(2):217–230, 1995.
- [30] Erich W. Schmid, Gerhard Spitz, and Wolfgang Lösch. *Theoretical Physics on the Personal Computer*. Springer-Verlag Germany, 1990.
- [31] G. Gamow. Zur quantentheorie des atomkernes. *Zeitschrift für Physik*, 51(3):204–212, Mar 1928.
- [32] B. Gyarmati and T. Vertse. Easy method for calculating the resonance parameters of the isobaric analogue resonance. *Nuclear Physics A*, 182(2):315 – 320, 1972.
- [33] B.G Giraud, M.V Mihailović, R.G Lovas, and M.A Nagarajan. Variational approach to resonant states of many-particle systems. *Annals of Physics*, 140(1):29 – 44, 1982.
- [34] V. I. Kukulin, V. M. Krasnopol’sky, and J. Horáček. *Theory of Resonances: Principles and Applications*. Springer Netherlands, 1989.
- [35] D.B. Jones. Armp-02 documentation: Part 2, chapter 6: Cpm-2 computer code manual: Volume 2, user’s manual.
- [36] www.nndc.bnl.gov.
- [37] Alex C. Mueller and Bradley M. Sherrill. Nuclei at the limits of particle stability. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 43:529–583, 1993.

- [38] Björn Jonson. Light dripline nuclei. *Physics Reports*, 389:1–59, Jan 2004.
- [39] E Roeckl. Exotic nuclei. *Reports on Progress in Physics*, 55(10):1661–1714, oct 1992.
- [40] P. J. Woods and C. N. Davids. Nuclei beyond the proton drip-line. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 47(1):541–590, 1997.
- [41] E. M. Baum, H. D. Knox, and T. R. Miller. Nuclides and isotopes — chart of nuclides. 2002.
- [42] P.G. Hansen and J.A. Tostevin. Direct reactions with exotic nuclei. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 53(1):219–261, 2003.
- [43] R. Id Betan. Cooper pairs in the Borromean nuclei ${}^6\text{He}$ and ${}^{11}\text{Li}$ using continuum single particle level density. *Nuclear Physics A*, 959(6):147–160, 2017.
- [44] Michael F. L'Annunziata. *Radioactivity*. Elsevier, 2007.
- [45] V I Goldanskii. Modes of radioactive decay involving proton emission. *Annual Review of Nuclear Science*, 16(1):1–30, 1966.
- [46] J Cerny and J C Hardy. Delayed proton radioactivities. *Annual Review of Nuclear Science*, 27(1):333–351, 1977.
- [47] A. H. Wapstra. Criteria that must be satisfied for the discovery of a new chemical element to be recognized. *Pure and Applied Chemistry*, 63(6):879–886, 1991.
- [48] M. Thoennessen. Reaching the limits of nuclear stability. *Reports on Progress in Physics*, 67(7):1187–1232, 2004.
- [49] B. M. K. Nefkens. New β^- activity induced by photon bombardment of lithium. *Phys. Rev. Lett.*, 10:55–57, Jan 1963.
- [50] A. Schwarzschild, A. M. Poskanzer, G. T. Emery, and M. Goldhaber. Another search for ${}^5\text{h}$. *Phys. Rev.*, 133:B1–B2, Jan 1964.
- [51] A.G. Artukh, V.V. Avdeichikov, J. Erö, G.F. Gridnev, V.L. Mikheev, V.V. Volkov, and J. Wilczyński. Evidence for particle instability of ${}^{13}\text{be}$ and ${}^{14}\text{be}$. *Physics Letters B*, 33(6):407 – 409, 1970.
- [52] D. Guillemaud-Mueller, J. C. Jacmart, E. Kashy, A. Latimier, A. C. Mueller, F. Pougheon, et al. Particle stability of the isotopes ${}^{26}\text{O}$ and ${}^{32}\text{Ne}$ in the reaction 44 mev/nucleon ${}^{48}\text{Ca}+{}^{\text{ta}}$. *Phys. Rev. C*, 41:937–941, Mar 1990.
- [53] J. D. Bowman, A. M. Poskanzer, R. G. Korteling, and G. W. Butler. Discovery of two isotopes, ${}^{14}\text{Be}$ and ${}^{17}\text{B}$, at the limits of particle stability. *Phys. Rev. Lett.*, 31:614–616, Aug 1973.
- [54] H. Sakurai, N. Aoi, A. Goto, M. Hirai, N. Inabe, M. Ishihara, et al. Production and identification of new neutron-rich nuclei, ${}^{31}\text{Ne}$ and ${}^{37}\text{Mg}$, in the reaction 80a mev ${}^{50}\text{Ti}+{}^{181}\text{ta}$. *Phys. Rev. C*, 54:R2802–R2805, Dec 1996.
- [55] S. Hinds, R. Middleton, A. E. Litherland, and D. J. Pullen. New isotope of carbon: c^{16} . *Phys. Rev. Lett.*, 6:113–115, Feb 1961.
- [56] O. B. Tarasov, D. S. Ahn, D. Bazin, N. Fukuda, A. Gade, M. Hausmann, et al. Discovery of Ca 60 and Implications for the Stability of Ca 70. *Physical Review Letters*, 121(2):22501, 2018.

- [57] G. Audi, A.H. Wapstra, and C. Thibault. The ame2003 atomic mass evaluation: (ii). tables, graphs and references. *Nuclear Physics A*, 729(1):337 – 676, 2003. The 2003 NUBASE and Atomic Mass Evaluations.
- [58] Takahiro Tachibana, Masahiro Uno, Masami Yamada, and So Yamada. Empirical mass formula with proton-neutron interaction. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 39(2):251 – 258, 1988.
- [59] Léo Neufcourt, Yuchen Cao, Witold Nazarewicz, Erik Olsen, and Frederi Viens. Neutron Drip Line in the Ca Region from Bayesian Model Averaging. *Physical Review Letters*, 122(6):1–6, 2019.
- [60] M. Beiner and R. J. Lombard. The Energy Density Formalism and the Shell Structure Effects. *Annals Of Physics*, 86(2):262–305, 1974.
- [61] M. Beiner and R. J. Lombard. Self-consistent calculations of ground state properties for unstable nuclei. *Nuclear Physics A*, 249(1):1–28, 1975.
- [62] Rui Wang and Lie-Wen Chen. Positioning the neutron drip line and the r-process paths in the nuclear landscape. *Physical Review C*, 92(3), Sep 2015.
- [63] Jaime Wisniak. Heike kamerlingh - the virial equation of state. *Indian Journal of Chemical Technology*, 10:564–572, 09 2003.
- [64] Erich Beth and George E. Uhlenbeck. The quantum theory of the non-ideal gas I. Deviations from the classical theory. *Physica*, 3(8):729–745, 1937.
- [65] Erich Beth and George E. Uhlenbeck. The quantum theory of the non-ideal gas. II. Behaviour at low temperatures. *Physica*, 4(10):915–924, 1937.
- [66] Tore Berggren. On the use of resonant states in eigenfunction expansions of scattering and reaction amplitudes. *Nuclear Physics, Section A*, 109(2):265–287, 1968.
- [67] R. J. Liotta, E. Maglione, N. Sandulescu, and T. Vertse. A representation to describe nuclear processes in the continuum, 1996.
- [68] R. Id Betan. Exact eigenvalues of the pairing Hamiltonian using continuum level density. *Physical Review C - Nuclear Physics*, 85(6):1–9, 2012.
- [69] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics*, volume 2. Wiley-Interscience, 1977.
- [70] Roger G. Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles*. Springer-Verlag Germany, 1982.
- [71] Leonard I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1955. Second Edition.
- [72] David M. Brink and Ricardo A. Broglio. *Nuclear Superfluidity: Pairing in Finite Systems*. Cambridge University Press, 2007.
- [73] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, Dec 1957.
- [74] Dirk van Delft and Peter Kes. The discovery of superconductivity. *Physics Today*, 63(9):38–43, sep 2010.
- [75] Leon N. Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Phys. Rev.*, 104:1189–1190, Nov 1956.

-
- [76] A. Bohr, B. R. Mottelson, and D. Pines. Possible analogy between the excitation spectra of nuclei and those of the superconducting metallic state. *Phys. Rev.*, 110:936–938, May 1958.
- [77] Jan von Delft and Fabian Braun. Superconductivity in ultrasmall grains: introduction to Richardson’s exact solution. pages 1–10, 1999.
- [78] Munetake Hasegawa and Kazunari Kaneko. Effects of resonant single-particle states on pairing correlations. *Physical Review C*, 67(2):1–4, 2003.
- [79] J. Dukelsky, S. Pittel, and G. Sierra. Colloquium: Exactly solvable Richardson-Gaudin models for many-body quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 76(3 I):643–662, 2004.
- [80] J. Dukelsky and S. Pittel. Exactly solvable Richardson – Gaudin models and their applications. *Physica Scripta*, pages 91–93, 2006.
- [81] R. Id Betan. Using continuum level density in the pairing Hamiltonian: BCS and exact solutions. *Nuclear Physics A*, 879:14–24, 2012.
- [82] G. Hagen, M. Hjorth-Jensen, G. R. Jansen, R. MacHleidt, and T. Papenbrock. Evolution of shell structure in neutron-rich calcium isotopes. *Physical Review Letters*, 109(3):1–5, 2012.
- [83] Madhubrata Bhattacharya and G. Gangopadhyay. Neutron drip line in odd and even mass calcium and nickel nuclei. *Physical Review C - Nuclear Physics*, 72(4):9–12, 2005.
- [84] Shuang Quan Zhang, Jie Meng, Shan Gui Zhou, and Jin Yan Zeng. Giant neutron halo in exotic calcium nuclei. *Chinese Physics Letters*, 19(3):312–314, 2002.
- [85] R. W. Richardson. Private Communications. 1999.
- [86] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.